Cartilha Lógica

Colin Allen & Michael Hand

Tradução de João José R. L. de Almeida

Capítulo 1
Lógica Sentencial

1.1 Noções Básicas de Lógica

argumento, premissas, conclusão

Definição. Um **ARGUMENTO** compõe-se de duas partes:
- um conjunto de sentenças, que são as **PREMISSAS**.
- uma sentença, que é a **CONCLUSÃO**.

Comentário. Todos os argumentos têm conclusões, mas nem todos os argumentos têm premissas: o conjunto de premissas pode ser um conjunto vazio! Mais tarde examinaremos essa ideia em detalhe.

Comentário. Se as sentenças envolvidas pertencem ao português (ou a qualquer outra língua natural), é preciso especificar se as premissas e a conclusão são sentenças que podem ser verdadeiras ou falsas. Isto é, as premissas e a conclusão devem ser, todas, sentenças declarativas (ou indicativas), como ‘O gato está sobre o tapete’ ou ‘Eu estou aqui’, e não sentenças como ‘O gato está sobre o tapete?’ (interrogativa) ou ‘Venha aqui!’(imperativa). Vamos construir algumas linguagens formais nas quais toda proposição ou é verdadeira ou é falsa. Essa qualificação não está presente na definição acima.

validade

Definição. Um argumento é VÁLIDO se, e somente se, for necessário que *se* todas as suas premissas forem verdadeiras, então sua conclusão também será verdadeira.

Comentário. A ideia intuitiva capturada por esta definição é a seguinte: se for possível que a conclusão de um argumento seja falsa, quando todas as suas premissas são verdadeiras, então o argumento não é confiável (isto é, ele é inválido). Se premissas verdadeiras garantem uma conclusão verdadeira, então o argumento é válido.

Formulação alternativa da definição. Um argumento é **VÁLIDO** se, e somente se, for impossível que todas as premissas sejam verdadeiras, enquanto a conclusão, falsa.

implicação

Definição. Quando um argumento é válido, dizemos que suas premissas **IMPLICAM** sua conclusão.

correção *Definição*. Um argumento é **CORRETO** se, e somente se, ele for válido e todas as suas premissas forem verdadeiras.

Comentário. Segue-se que todos os argumentos corretos têm conclusões verdadeiras.

Comentário. Um argumento pode ser incorreto em uma de duas maneiras: ele é inválido, ou ele tem uma ou mais falsas premissas.

Comentário. O resto deste livro se ocupará com a validade, em vez da correção.

Exercício 1.1 Indique se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa.

i* Toda premissa de um argumento válido é verdadeira.
ii* Todo argumento inválido tem uma conclusão falsa.
iii* Todo argumento válido tem exatamente duas premissas.
iv* Alguns argumentos válidos têm conclusões falsas.
v* Alguns argumentos válidos têm uma conclusão falsa, mesmo que tenham todas as premissas verdadeiras.
vi* Um argumento correto não pode ter uma conclusão falsa.
vii* Alguns argumentos corretos são inválidos.
viii* Alguns argumentos incorretos têm premissas verdadeiras.
ix* Premissas de argumentos corretos implicam suas conclusões.
x* Se um argumento tem premissas verdadeiras e uma conclusão verdadeira, então ele é correto.

1.2 Uma Linguagem Formal para a Lógica Sentencial

linguagem formal *Comentário*. Para representar similaridades entre argumentos de uma linguagem natural, os lógicos introduzem linguagens formais. A primeira linguagem formal que vamos introduzir é a linguagem da lógica sentencial (também conhecida como lógica proposicional). No capítulo 3 introduziremos uma linguagem mais sofisticada: a da lógica de predicados.

vocabulário *Definição*. O **VOCABULÁRIO DA LÓGICA SENTENCIAL** consiste em

- **LETRAS SENTENCIAIS**,
- **CONECTIVOS**, e
- **PARÊNTESES**.

letra sentencial

Definição. Uma letra sentencial é qualquer símbolo da seguinte lista:
A, ..., Z, A_0, ..., Z_0, A_1, ..., Z_1, ...

variável sentencial

Comentário. Pelo uso de números subscritos tornamos disponíveis um número infinito de letras sentenciais. Essas letras sentenciais são denominadas algumas vezes como **VARIÁVEIS SENTENCIAIS,** porque as utilizamos para representar proposições da linguagem natural.

conectivos

Definição. Os **CONECTIVOS SENTENCIAIS** (mais conhecidos como **CONECTIVOS**) são os membros da seguinte lista: ~, &, ∨, →, ↔.

Comentário. Os conectivos sentenciais correspondem a várias palavras nas linguagens naturais que servem para conectar proposições declarativas.

til ~

O **TIL** corresponde ao português ‘Não é o caso de que’. (Neste caso, o uso do termo ‘conectivo’ é peculiar, já que somente uma proposição declarativa é negada por vez.)

e comercial &

O **E COMERCIAL** corresponde ao português ‘... e ...’.

cunha ∨

A **CUNHA** corresponde ao português ‘... ou ...’ no seu sentido inclusivo.

seta →

A **SETA** corresponde ao português ‘Se ..., então ...’.

seta dupla ↔

A **SETA DUPLA** corresponde ao português ‘se, e somente se, ...’.

Comentário. As linguagens naturais normalmente dispõem de mais de uma maneira de expressar uma dada conexão entre proposições. Por exemplo, a proposição ‘João está dançando, mas Maria está sentando’ expressa a mesma relação lógica que 'João está dançando e Maria está sentando'. O tema da tradução do português para a linguagem formal é tratado na seção 1.3.

) e (

Os parênteses direito e esquerdo são usados como marcas de pontuação para a linguagem.

expressão

Definição. Uma **EXPRESSÃO** da lógica sentencial é qualquer sequência de letras sentenciais, conectivos sentenciais, ou parênteses direito e esquerdo.

Exemplos.
(P → Q) é uma expressão da lógica sentencial.
)PQ→~ também é uma expressão da lógica sentencial.
(3 → 4) não é uma expressão da lógica sentencial.

metavariável

Definição. Letras gregas como φ e ψ são usadas como **METAVARIÁVEIS**. Elas não são partes da linguagem da lógica sentencial, mas simbolizam expressões da linguagem.

Comentário. (φ → ψ) não é uma expressão da lógica sentencial, mas pode ser usada para representar uma expressão da lógica sentencial.

fórmula bem-formada

Definição. Uma **FÓRMULA BEM-FORMADA** (**FBF**) da lógica sentencial é qualquer expressão que está de acordo com as seguintes sete regras:

(1) **Uma letra sentencial sozinha é uma fbf.**

proposição atômica

[*Definição*. As letras sentenciais são **PROPOSIÇÕES ATÔMICAS** da linguagem da lógica sentencial.]

(2) **Se φ é uma fbf, então a expressão denotada por ~φ também é uma fbf.**

negação

[*Definição*. Uma FBF dessa forma é chamada de **NEGAÇÃO**, e **~φ** é chamada de **NEGAÇÃO DE φ**.]

(3) Se φ e ψ são fbfs, então a expressão denotada por (φ & ψ) é uma fbf.

conjunção

[*Definição*. Uma fbf dessa forma é chamada de **CONJUNÇÃO**. φ e ψ são chamados de **CONJUNCTOS** esquerdo e direito, respectivamente.]

(4) Se φ e ψ são fbfs, então a expressão denotada por (φ ∨ ψ) é uma fbf.

disjunção

[*Definição*. Uma fbf dessa forma é chamada de **DISJUNÇÃO**. φ e ψ são chamados de **DISJUNCTOS** esquerdo e direito, respectivamente.]

(5) Se φ e ψ são fbfs, então a expressão denotada por (φ → ψ) é uma fbf.

condicional, antecedente, consequente

[*Definição*. Uma fbf dessa forma é chamada de **CONDICIONAL.** A fbf φ é chamada de **ANTECEDENTE** do condicional. A fbf ψ é chamada de **CONSEQUENTE** do condicional.]

(6) Se φ e ψ são fbfs, então a expressão denotada por (φ ↔ ψ) é uma fbf.

bicondicional

[*Definição*. Uma fbf dessa forma é chamada de **BICONDICIONAL**. É também algumas vezes chamada de **EQUIVALÊNCIA.**]

(7) Nada mais é uma fbf.

conectivos unários e binários

Definição. &, ∨, →, e ↔ são **CONECTIVOS BINÁRIOS**, porque conectam duas fbfs. ~ é um **CONECTIVO UNÁRIO**, porque se liga a apenas uma fbf.

proposição

Definição. Uma **PROPOSIÇÃO** da linguagem formal é uma fbf que não é parte de uma fbf maior.

denegação

Definição. A **DENEGAÇÃO** de uma fbf φ, que não é uma negação, é $\sim\varphi$. Uma negação, $\sim\varphi$, tem duas **DENEGAÇÕES**: φ e $\sim\sim\varphi$.

Exemplo.
$\sim(P \rightarrow Q)$ tem uma negação: $\sim\sim(P \rightarrow Q)$.
E tem duas denegações: $(P \rightarrow Q)$ e $\sim\sim(P \rightarrow Q)$.

$(P \rightarrow Q)$ tem apenas uma denegação: a sua negação, $\sim(P \rightarrow Q)$.

Comentário. A razão para introduzir as ideias de uma proposição e uma denegação ficarão claras quando forem introduzidas as regras de prova na seção 1.4.

Exercício 1.2.1

Quais das seguintes expressões são fbfs? Diga se uma expressão é uma fbf, isto é, se ela é uma proposição atômica, uma condicional, uma conjunção, uma disjunção, uma negação ou uma bicondicional. Para os conectivos binários, identifique as fbfs componentes (antecedente, consequente, conjunctos, disjunctos etc.).

i*	A
ii*	$(A$
iii*	(A)
iv*	$(A \rightarrow B)$
v*	$(A \rightarrow ($
vi*	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
vii*	$((P \,\&\, Q) \rightarrow R)$
viii*	$((A \,\&\, B) \vee (C \rightarrow (D \leftrightarrow G)))$
ix*	$\sim (A \rightarrow B)$
x*	$\sim (P \rightarrow Q) \vee \sim(Q \,\&\, R)$
xi*	$\sim (A)$
xii*	$(\sim A) \rightarrow B$
xiii*	$(\sim(P \,\&\, P) \,\&\, (P \leftrightarrow (Q \vee \sim Q)))$
xiv*	$(\sim((B \vee P) \,\&\, C) \leftrightarrow ((D \vee \sim G) \rightarrow H))$
xv*	$(\sim(Q \vee \sim(B)) \vee (E \leftrightarrow (D \vee X)))$

convenções de eliminação de parênteses

Comentário. Para facilitar a leitura é conveniente, muitas vezes, eliminar parênteses das fbfs, contanto que não resulte em ambiguidade. Se uma proposição estiver cercada por parênteses, então eles podem ser eliminados.

Exemplo.

$P \rightarrow Q$ será lido como uma abreviação de $(P \rightarrow Q)$.

Comentário. Quando os parênteses estão embutidos dentro de proposições, devemos ser cautelosos ao omiti-los. Por exemplo, a expressão $P \ \& \ Q \rightarrow R$ é potencialmente ambígua entre $((P \ \& \ Q) \rightarrow R)$ e $(P \ \& \ (Q \rightarrow R))$. Para resolver estas ambiguidades nós adotamos a seguinte convenção: $\sim$ se liga mais fortemente do que todos os outros conectivos; & e $\vee$ liga expressões componentes mais fortemente do que $\rightarrow$, que, por sua vez, liga seus componentes mais fortemente do que $\leftrightarrow$.

$\sim P \ \& \ Q \rightarrow R$ é lido como $((\sim P \ \& \ Q) \rightarrow R)$.
$P \rightarrow Q \leftrightarrow R$ é lido como $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R)$.
$P \vee Q \ \& \ R$ não é permitido, porque é ambíguo entre
$(P \vee (Q \ \& \ R))$ e $((P \vee Q) \ \& \ R)$.
$P \rightarrow Q \rightarrow R$ não é permitido, porque é ambíguo entre
$(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ e $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$.

Comentário. As expressões admitidas por essas convenções de eliminação de parênteses não são, elas mesmas, formulas bem-formadas da lógica sentencial.

Exercício 1.2.2 Reescreva todas as proposições do exercício 1.2.1 acima, utilizando as convenções de eliminação de parênteses. Omita todos os parênteses que você puder, sem introduzir ambiguidade.

Exercício 1.2.3 Ateste se cada uma das proposições abaixo é ou não ambígua, dadas as convenções de eliminação de parênteses. Nos casos não ambíguos, reescreva as proposições reinstaurando todos os parênteses omitidos.

i* $P \leftrightarrow \sim Q \vee R$
ii* $P \vee Q \rightarrow R \ \& \ S$
iii* $P \vee Q \rightarrow R \leftrightarrow S$
iv* $P \vee Q \ \& \ R \rightarrow \sim S$
v* $P \rightarrow R \ \& \ S \rightarrow T$
vi* $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S$
vii* $P \ \& \ Q \leftrightarrow \sim R \vee S$
viii * $\sim P \ \& \ Q \vee R \rightarrow S \leftrightarrow T$
ix* $P \rightarrow Q \ \& \sim R \leftrightarrow \sim S \vee T \rightarrow U$
x* $P \rightarrow Q \ \& \sim R \rightarrow \sim S \vee T \leftrightarrow U$

1.3 Tradução do Português para FBFs Sentenciais

esquema de tradução

Definição. Um **ESQUEMA DE TRADUÇÃO** para a linguagem da lógica sentencial é uma equiparação entre letras sentenciais e proposições da linguagem natural. As proposições de um esquema de tradução devem ser logicamente simples. Isto é, elas não devem conter nenhuma palavra que corresponda aos conectivos sentenciais.

forma lógica

Definição. A **FORMA LÓGICA** de uma proposição da linguagem natural, relativa ao esquema de tradução, é dada pela sua tradução numa fbf da lógica sentencial, de acordo com este esquema de tradução.

Exemplo.
Pelo esquema de tradução
P: João é bom de lógica
Q: José está feliz
A proposição
Se João é bom de lógica, então José está feliz
tem a forma lógica $(P \rightarrow Q)$.

Comentário. O português oferece muitas maneiras diferentes de formular negações, condicionais, conjunções, disjunções e bicondicionais. Assim, muitas proposições distintas do português podem ter a mesma forma lógica.

variantes estilísticas

Definição. Se duas proposições da linguagem natural têm a mesma forma lógica, relativa a um único esquema de tradução, diz-se que elas são **VARIANTES ESTILÍSTICAS** uma da outra.

Comentário. Existem muitíssimas variantes estilísticas de negações, conjunções, disjunções, condicionais e bicondicionais para serem, todas, listadas aqui. Segue-se abaixo uma lista parcial de variantes estilísticas de cada categoria.

negações Digamos que P traduz a proposição 'João está consciente'. Aqui estão algumas das maneiras de expressar $\sim$P:

João não está consciente.
João está inconsciente.
Não é o caso de que João está consciente.
É falso que João está consciente.

condicionais Incluem-se as seguintes variantes estilísticas cuja forma lógica é $(\varphi \rightarrow \psi)$, onde φ é o antecedente e ψ é o consequente:

Se φ, ψ.
φ somente se ψ.
φ é uma condição suficiente para ψ.
φ é suficiente para ψ.
Contanto que φ, ψ.
ψ contanto que φ.
ψ sob a condição de que φ.
ψ é uma condição necessária para φ.
ψ é necessário para φ.
Onde quer que φ, ψ.
ψ se φ.
Dado que φ, ψ.
Em caso de que φ, ψ.
φ somente sob a condição de que ψ.

conjunções Incluem-se as seguintes variantes estilísticas cuja forma lógica é $(\varphi \;\&\; \psi)$:

φ e ψ.
Tanto φ quanto ψ.
φ mas ψ.
φ mesmo que ψ.
φ bem como ψ.
Ainda que φ, ψ.
φ, e também ψ.

disjunções Incluem-se as seguintes variantes com a forma lógica $(\varphi \vee \psi)$:

φ ou ψ.
Ou φ ou ψ.
φ, a menos que ψ.

Comentário. 'φ, a menos que ψ' é também comumente traduzido como $(\sim\psi \rightarrow \varphi)$. As técnicas de prova introduzidas na seção 1.4 podem ser usadas para mostrar que esta proposição é equivalente a $(\varphi \vee \psi)$.

bicondicionais

Incluem-se as seguintes variantes com a forma lógica ($\varphi \leftrightarrow \psi$):
φ se, e somente se, ψ.
φ é equivalente a ψ.
φ é necessário e suficiente para ψ.
φ apenas no caso de que ψ.

nem... nem...

Proposições em português com a forma 'Nem φ nem ψ', têm a forma lógica $\sim(\varphi \vee \psi)$, ou, de maneira equivalente, $(\sim\varphi \ \& \sim \psi)$.

tempos

Comentário. No português, as proposições 'Maria está dançando' e 'Maria dançará', têm signSeicados dSeerentes por causa dos tempos dos seus respectivos verbos. Em alguns casos, quando se está analisando argumentos, é importante preservar a distinção entre os tempos. Em outros casos, a distinção pode ser ignorada. Como regra geral, é necessário uma avaliação para decidir se o tempo pode ser ignorado sem cometer erros.

Exemplo.
Considere os dois argumentos abaixo:

A Se Maria está dançando, João dançará.
Maria está dançando.
Portanto, João está dançando.

B Se Maria dança, João dançará.
Se João dança, José dançará.
Portanto, se Maria dança, José dançará.

Em A, se a diferença entre 'João dançará' e 'João está dançando' for ignorada, o argumento parecerá válido na tradução. Mas isto não parece razoável num bom escrutínio do português.

Em B, ignorar a diferença entre 'João dançará' e 'João dança' também torna o argumento válido na tradução. Neste caso, entretanto, isto parece razoável.

Nos exercícios de tradução abaixo, assuma que as distinções de tempo podem ser ignoradas.

Exercício 1.3 Traduza as proposições abaixo para a linguagem da lógica sentencial

Esquema de tradução para 1-20
P: João dança.
Q: Maria dança.
R: José dança.
S: João está feliz.
T: Maria está feliz.
U: José está feliz.

1* João está dançando, mas Maria não está dançando.
2* Se João não dança, então Maria não estará feliz.
3* A dança do João é suficiente para fazer Maria feliz.
4* A dança do João é necessária para fazer Maria feliz.
5* João não dançará, a menos que Maria esteja feliz.
6* Se a dança do João for necessária para Maria ficar feliz, José estará infeliz.
7* Se Maria dança, mesmo que João não esteja feliz, José dançará.
8* Se nem João nem José estão dançando, Maria não está feliz.
9* Maria não está feliz, a menos que ou João ou José estejam dançando .
10* Maria estará feliz se tanto João quanto José estejam dançando.
11* Mesmo que nem João nem José estejam dançando, Maria está feliz.
12* Se José dança, então, se Maria dança, João também.
13* Maria estará feliz somente se José está feliz.
14* Nem João nem José dançarão se Maria não está feliz.
15* Se Maria dança somente se José dança, e João dança somente se Maria dança, então João dança somente se José dança.
16* Maria dançará se João ou José, mas não ambos, dancem.
17* Se João dança, e Maria também, mas José não, então Maria não estará feliz, mas João e José, sim.
18* Maria estará feliz se, e somente se, João está feliz.
19* Contanto que José esteja infeliz, João não dançará, a menos que Maria esteja dançando.
20* Se João dança sob a condição de que, se ele dança, Maria dança, então ele dança.

Esquema de tradução para 21-25
P: Um dos objetivos da pena é a condenação.
Q: A pena de morte é uma condenação definitiva.

R: A pena de morte deve permanecer.
S: A pena de morte é utilizada nos Estados Unidos.
T: Um dos objetivos da pena é a retaliação.

21* Se um dos objetivos da pena é a condenação, e a pena de morte é uma condenação definitiva, então a pena de morte deve permanecer.

22* A pena de morte não é uma condenação definitiva, mesmo que seja utilizada nos Estados Unidos.

23* A pena de morte não deve permanecer, se ela não é uma condenação definitiva, a menos que a condenação não seja um dos objetivos da pena.

24 * Se a retaliação é um dos objetivos da pena, mas a condenação não o é, então a pena de morte não deve permanecer.

25 * A pena de morte deve permanecer, mesmo que não seja uma condenação definitiva, contanto que um dos objetivos da pena seja a retaliação, em acréscimo à condenação.

1.4 Regras Primitivas de Prova

acarretamento

Definição. O símbolo de **ACARRETAMENTO** é ⊢.

sequente

Definição. Um **SEQUENTE** consiste em uma certa quantidade de proposições separadas por vírgula (que correspondem às premissas de um argumento), seguidas por um acarretamento, e, por sua vez, seguido por uma outra proposição (que corresponde à conclusão de um argumento).
Exemplo. $(P \& Q) \rightarrow R, \sim R \& P \vdash \sim Q$

Comentário. Sequentes nada mais são do que um modo conveniente de mostrar argumentos na notação formal. O símbolo de acarretamento pode ser lido como 'portanto'.

prova

Definição. Uma **PROVA** é uma sequência de linhas que contêm proposições. Cada proposição é uma suposição ou o resultado da aplicação de uma regra de prova a proposições anteriores da sequência. As regras primitivas de prova são apresentadas abaixo.

Comentário. O objetivo de apresentar provas é para demonstrar *inequivocamente* que um dado conjunto de premissas implica uma conclusão particular. Assim, ao apresentar uma prova, nós associamos três coisas com cada proposição da sequência de prova:

anotação

À direita da proposição, fornecemos uma **ANOTAÇÃO** que especifique que regra de prova foi aplicada a quais proposições anteriores para produzir a dada proposição.

conjunto de suposição

Do lado mais à esquerda, associamos com cada sentença um **CONJUNTO DE SUPOSIÇÕES** que contém as suposições das quais a dada proposição depende.

número da linha

Também à esquerda, escrevemos o **NÚMERO DA LINHA** atual da prova.

linha da prova

Definição. Uma proposição de uma prova, junto com a sua anotação, seu conjunto de suposições e o número da linha é chamado de **LINHA DA PROVA**.

Exemplo.

1,2	(7)	$P \rightarrow Q \& R$	$6 \rightarrow I$ (3)
	Número da linha		Anotação
↑		↑	
Conjunto de suposições		Proposição	

prova para um argumento dado

Definição. Uma **PROVA PARA UM ARGUMENTO DADO**, é uma prova cuja última proposição é a conclusão do argumento, que depende de nada mais senão das suas premissas.

regras primitivas

Definição. As dez REGRAS PRIMITIVAS DE PROVA são as regras de suposição, introdução-do-e-comercial, eliminação-do-e-comercial, introdução-da-cunha, eliminação-da-cunha, introdução-da-seta, eçliminação-da-seta, redução ao absurdo, introdução-da-seta-dupla, e eliminação-da-seta-dupla, tal como descritas abaixo.

suposição

Assuma qualquer proposição.

Anotação:	**A**
Conjunto de suposições:	O número da linha atual.
Comentário:	Qualquer proposição pode ser assumida, a qualquer momento. Contudo, algumas suposições são úteis, outras não!

Exemplo.

1	(1)	P ∨ Q	A

introdução do e comercial

Dadas duas proposições (nas linhas *m* e *n*), conclua por uma conjunção entre elas.

Anotação:	**m, n &I**
Conjunto de suposições:	A união dos conjuntos de suposições das linhas *m* e *n*.
Comentário:	A ordem das linhas *m* e *n* na prova é irrelevante. As linhas referidas como *m* e *n* podem, inclusive, ser as mesmas.
Também conhecida como:	Conjunção (CONJ).

Exemplos.

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
1,2	(3)	P & Q	1,2 &I
1,2	(4)	Q & P	1,2 &I
1	(5)	P & P	1,1 &I

eliminação do e comercial

Dada uma proposição que seja uma conjunção (na linha *m*), conclua por algum dos conjunctos.

Anotação:	**m &E**
Conjunto de suposições:	A mesma da linha *m*.
Também conhecida como:	Simplificação (S).

Exemplos.

(a)

1	(1)	P & Q	A
1	(2)	Q	1 &E
1	(3)	P	1 &E

(b)

1	(1)	P & (Q → R)	A
1	(2)	Q → R	1 &E

introdução da cunha

Dada uma proposição (na linha *m*), conclua por qualquer disjunção que tenha esta proposição como um disjuncto.

Anotação:	**m vI**
Conjunto de suposições:	O mesmo da linha *m*.
Também conhecido como:	Adição (ADD).

Exemplos.

(a)

1	(1)	P	A
1	(2)	P ∨ Q	1 ∨I
1	(3)	(R ↔ ~T) ∨ P	1 ∨I

(b)

1	(1)	Q → R	A
1	(2)	(Q → R) ∨ (P & ~S)	1 ∨I

eliminação da cunha

Dada uma proposição (na linha *m*) que seja uma disjunção, e uma outra proposição (na linha *n*) que seja a denegação de um dos seus disjunctos, conclua pelo outro disjuncto.

Anotação:	**m, n** ∨**E**
Conjunto de suposições:	A união dos conjuntos de suposições das linhas *m* e *n*.
Comentário:	A ordem das linhas *m* e *n* na prova é irrelevante.
Também conhecida como:	Modus Tollendo Ponens (MTP), Silogismo Disjuntivo (SD).

Exemplos.

(a)

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	$\sim P$	A
1,2	(3)	Q	1,2 $\vee$E

(b)

1	(1)	$P \vee (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$\sim(Q \rightarrow R)$	A
1,2	(3)	P	1,2 $\vee$E

(c)

1	(1)	$P \vee \sim R$	A
2	(2)	R	A
1,2	(3)	P	1,2 $\vee$E

introdução da seta

Dada uma proposição (na linha *n*), conclua por uma condicional que tenha esta proposição como consequente, e cujo antecedente apareça na prova como uma suposição (na linha *m*).

Anotação:	***n*** **→I (*m*)**
Conjunto de suposições:	Tudo o que estiver no conjunto de suposições da linha *n*, excetuando a linha *m*, que é o número da linha no qual o antecedente foi assu-mido.
Comentário:	O antecedente deve estar presente na prova como uma suposição. Nós chamamos esta suposição de **DESCARREGAMENTO**, quando aplicamos esta regra. A colocação entre parên-teses do número *m* indica que ele é a suposição descarregada. As linhas *m* e *n* podem ser as mesmas.
Também conhecida como:	Prova do Condicional (PC).

Exemplos.

(a)

1	(1)	$\sim P \vee Q$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	Q	1,2 ∨E
1	(4)	$P \rightarrow Q$	3 →I (2)

(b)

1	(1)	R	A
2	(2)	P	A
1	(3)	$P \rightarrow R$	1 →I (2)

(c)

1	(1)	P	A
	(2)	$P \rightarrow P$	1 → I(1)

eliminação da seta

Dada uma proposição condicional (na linha *m*), e uma outra proposição que seja o seu antecedente (na linha *n*), conclua pelo consequente do condicional.

Anotação:	***m***, ***n*** **→E**
Conjunto de suposições:	A união dos conjuntos de suposições das linhas *m* e *n*.
Comentário:	A ordem de *m* e *n* na prova é irrelevante.
Também conhecida como:	Modus Ponendo Ponens (MPP), Modus Ponens (MP), Destacamento, Afirmação do Antecedente.

Exemplo.

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	Q	1,2 →E

redução ao absurdo

Dadas uma proposição e a sua denegação (nas linhas *m* e *n*), conclua pela denegação de qualquer suposição que apareça na prova (na linha *k*).

Anotação:	***m***, ***n*** **RAA (*k*)**

Conjunto de suposições:	A união dos conjuntos de suposições das linhas *m* e *n*, com a exclusão de *k* (a suposição denegada)
Comentário:	A proposição da linha *k* é a suposição descarregada (também conhecida como **SUPOSIÇÃO RE-DUZIDA**), e a conclusão deve ser uma denegação da suposição descar-regada. As proposições das linha *m* e *n* devem ser a denegação uma da outra.
Também conhecida como:	Prova Indireta (PI), ~Intro/~Elim.

Exemplos.

(a)

1	(1)	P → Q	A
2	(2)	~Q	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 →E
1,2	(5)	~P	2,4 RAA (3)

(b)

1	(1)	P ∨ Q	A
2	(2)	~P	A
1,2	(3)	~P → ~Q	A
2,3	(4)	~Q	2,3 →E
1,2,3	(5)	P	1,4 ∨E
1, 3	(6)	P	2,5 RAA (2)

(c)

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
3	(3)	~Q	A
2,3	(4)	~P	2,3 RAA (1)

introdução da seta dupla	Dadas duas proposições condicionais que tenham a forma φ → ψ e ψ → φ (nas linhas *m* e *n*), conclua por uma bicondicional que tenha φ de um lado e ψ do outro.

Anotação:	***m*, *n* ↔I**
Conjunto de suposições:	A união dos conjuntos de suposições das linhas *m* e *n*.
Comentário:	A ordem de *m* e *n* na prova é irrelevante.

Exemplo.

1	(1)	P → Q	A
2	(2)	Q → P	A
1,2	(3)	P ↔ Q	1,2 ↔I
1,2	(4)	Q ↔ P	1,2 ↔I

eliminação da seta dupla

Dada uma proposição bicondicional φ ↔ ψ (na linha *m*), conclua por φ → ψ ou por ψ → φ.

Anotação:	***m* ↔E**
Conjunto de suposições:	O mesmo da linha *m*.
Também conhecida como:	Algumas vezes as regras ↔I e ↔E são subsumidas como Defi-nição da Bicondicional (df. ↔).

Exemplo.

1	(1)	P ↔ Q	A
1	(2)	P → Q	1 ↔E
1	(3)	Q → P	1 ↔E

Comentário. Estas dez regras de prova preservam sempre a verdade. Dadas premissas verdadeiras, elas irão produzir conclusões verdadeiras. Isto implica que se uma prova puder ser construída para um dado argumento, então o argumento é válido.

Comentário. Um certo número de estratégias ajudam na descoberta de provas, mas não há substituto para a prática. Não oferecemos nenhuma estratégia de descobrimento de provas neste livro – este papel pertence ao instrutor. Oferecemos, sim, uma boa quantidade de exercícios, de modo que não haverá falta de oportunidade para a prática.

Exercício 1.4.1	Preencha os espaços em branco nas seguintes provas.			
i	$P, \sim Q \vdash P \& \sim Q$			
	1	(1)	P	
		(2)	$\sim Q$	A
		(3)	$P \& \sim Q$	
ii*	$P \vee Q, \sim Q \vee R, \quad\quad \vdash$			
		(1)	$P \vee Q$	A
	2	(2)	$\sim Q \vee R$	
		(3)		
		(4)	Q	1,3 ∨E
		(5)		2,4
iii*	$P \rightarrow Q, P \vee Q \vdash Q$			
		(1)	$P \rightarrow Q$	A
		(2)	$P \vee Q$	A
	3	(3)	$\sim Q$	
		(4)	P	
		(5)		
		(6)	Q	3,5 RAA
iv*	$\quad\quad\quad\quad \vdash \sim P \rightarrow R$			
		(1)	$\sim P \leftrightarrow Q$	A
		(2)	$\sim P$	A
	3	(3)	$\sim Q \vee R$	
		(4)	$\sim P \rightarrow Q$	
		(5)		2,4
		(6)	R	
		(7)	$\sim P \rightarrow R$	
v	$P \rightarrow Q \vdash (R \vee \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$			
	1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
	2	(2)		A
	3	(3)	P	A
		(4)		1,3 →E
		(5)	R	2,4 ∨E
		(6)		5 →I(3)
	1	(7)	$(R \vee \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	6

Exercício 1.4.2 Forneça as provas para os sequentes abaixo. Todas essas provas podem ser completadas sem usar as regras →I ou RAA.

Sl*	P ∨ ~R, ~R → S, ~P ⊢ S
S2	P ∨ ~R, ~R → S,~P ⊢ S & ~R
S3*	P → ~Q, ~Q ∨ R → ~S, P & T ⊢ ~S
S4*	P & (Q & R), P & R → ~S, S ∨ T ⊢ T
S5	P → Q, P → R, P ⊢ Q & R
S6	P, Q ∨ R, ~R ∨ S, ~Q ⊢ P & S
S7*	~P, R ∨ ~P ↔ P ∨ Q ⊢ Q
S8	(P ↔ Q) → R,P → Q,Q → P ⊢ R
S9*	~P → Q & R, ~P ∨ S → ~ T, U & ~P ⊢ (U & R) & ~T
S10	(Q ∨ R) & ~S → T, Q & U, ~S ∨ ~U ⊢ T & U

1.5 Sequentes e Regras Derivadas

acarretamento duplo

Comentário. Se um sequente tem apenas uma sentença de cada lado de um acarretamento, pode ser inserido um acarretamento reverso (⊣) para representar o argumento da proposição do lado direito em direção à proposição do lado esquerdo.

Exemplo. P ⊣⊢ P ∨ P

Comentário. Este exemplo corresponde a dois sequentes P ⊢ P ∨ P e P ∨ P ⊢ P. Você pode ler o exemplo como se estivesse dizendo 'P, portanto P ou P, e P ou P, portanto P. Quando se estiver provando que φ ⊣⊢ ψ, deve-se fornecer duas provas: uma para φ ⊢ ψ e outra para ψ ⊢ φ.

Exemplo.
Prove que P ⊣⊢ P ∨ P.

(a) Prove que P ⊢ P ∨ P.

1	(1)	P	A
1	(2)	P ∨ P	1 ∨I

(b) Prove que P ∨ P ⊢ P.

1	(1)	P ∨ P	A
2	(2)	~P	A
1,2	(3)	P	1,2 ∨E
1	(4)	P	2,3 RAA (2)

Exercício 1.5.1 Forneça as provas dos sequentes abaixo, utilizando as regras primitivas de prova.

S11*	$P \dashv\vdash \sim\sim P$	**N**egação **D**upla
S12*	$P \to Q, \sim Q \vdash \sim P$	**M**odus **T**ollendo **T**ollens
S13	$P \to \sim Q, Q \vdash \sim P$	MTT
S14*	$\sim P \to Q, \sim Q \vdash P$	MTT
S15	$\sim P \to \sim Q, Q \vdash P$	MTT
S16*	$P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$	**S**ilogismo **H**ipotético
S17*	$P \vdash Q \to P$	**C**onsequente **V**erdadeiro
S18*	$\sim P \vdash P \to Q$	**A**ntecedente **F**also
S19	$P \vdash \sim P \to Q$	**AF**
S20	$P \to Q, P \to \sim Q \vdash \sim P$	**A**ntecedente **I**mpossível
S21*	$\sim P \vee Q \dashv\vdash P \to Q$	Cunha-Seta (∨→)
S22	$P \vee Q \dashv\vdash \sim P \to Q$	∨→
S23	$P \vee Q \dashv\vdash \sim Q \to P$	∨→
S24	$P \vee \sim Q \dashv\vdash Q \to P$	∨→
S25	$P \vee Q, P \to R, Q \to R \vdash R$	**Dil**ema **Sim**ples
S26*	$P \vee Q, P \to R, Q \to S \vdash R \vee S$	**Dil**ema **Com**plexo
S27	$P \to Q, \sim P \to Q \vdash Q$	**Dil**ema **Espec**ial
S28*	$\sim(P \vee Q) \dashv\vdash \sim P \,\&\, \sim Q$	Lei de **DeM**organ
S29	$\sim(P \,\&\, Q) \dashv\vdash \sim P \vee \sim Q$	DM
S30	$P \,\&\, Q \dashv\vdash \sim(\sim P \vee \sim Q)$	DM
S31	$P \vee Q \dashv\vdash \sim(\sim P \,\&\, \sim Q)$	DM
S32*	$\sim(P \to Q) \dashv\vdash P \,\&\, \sim Q$	Seta Negada (→Neg)
S33	$\sim(P \to \sim Q) \dashv\vdash P \,\&\, Q$	→Neg
S34	$P \to Q \dashv\vdash \sim(P \,\&\, \sim Q)$	→Neg
S35	$P \to \sim Q \dashv\vdash \sim(P \,\&\, Q)$	→Neg
S36	$P \,\&\, Q \dashv\vdash Q \,\&\, P$	**& Com**utatividade
S37*	$P \vee Q \dashv\vdash Q \vee P$	∨ **Com**utatividade
S38*	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash Q \leftrightarrow P$	**↔ Com**utatividade
S39	$P \to Q \dashv\vdash \sim Q \to \sim P$	**Trans**posição
S40	$P \,\&\, (Q \,\&\, R) \dashv\vdash (P \,\&\, Q) \,\&\, R$	**& Assoc**iatividade
S41*	$P \vee (Q \vee R) \dashv\vdash (P \vee Q) \vee R$	∨ **Assoc**iatividade
S42*	$P \,\&\, (Q \vee R) \dashv\vdash (P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R)$	**&**/∨ **Distri**buição
S43	$P \vee (Q \,\&\, R) \dashv\vdash (P \vee Q) \,\&\, (P \vee R)$	∨/**& Distri**buição
S44	$P \to (Q \to R) \dashv\vdash P \,\&\, Q \to R$	**Imp**/**Exp**ortação
S45	$P \leftrightarrow Q, P \vdash Q$	**B**iconditional **P**onens
S46	$P \leftrightarrow Q, Q \vdash P$	BP
S47	$P \leftrightarrow Q, \sim P \vdash \sim Q$	**B**iconditional **T**ollens
S48	$P \leftrightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$	BT
S49	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash \sim Q \leftrightarrow \sim P$	**BiTrans**posição
S50	$P \leftrightarrow \sim Q \dashv\vdash \sim P \leftrightarrow Q$	BiTrans
S51	$\sim(P \leftrightarrow Q) \dashv\vdash P \leftrightarrow \sim Q$	↔ Negada
S52	$\sim(P \leftrightarrow Q) \dashv\vdash \sim P \leftrightarrow Q$	↔Neg

Exercício 1.5.2 Forneça as provas para os sequentes, utilizando as regras primitivas de prova.

S53*	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash (P \,\&\, Q) \vee (\sim P \,\&\, \sim Q)$
S54	$P \rightarrow Q \,\&\, R, R \vee \sim Q \rightarrow S \,\&\, T, T \leftrightarrow U \vdash P \rightarrow U$
S55*	$(\sim P \vee Q) \,\&\, R, Q \rightarrow S \vdash P \rightarrow (R \rightarrow S)$
S56*	$Q \,\&R, Q \rightarrow P \vee S, \sim(S \,\&\, R) \vdash P$
S57	$P \rightarrow R \,\&\, Q, S \rightarrow \sim R \vee \sim Q \vdash S \,\&\, P \rightarrow T$
S58	$R \,\&\, P, R \rightarrow (S \vee Q), \sim(Q \,\&\, P) \vdash S$
S59	$P \,\&\, Q, R \,\&\, \sim S, Q \rightarrow (P \rightarrow T), T \rightarrow (R \rightarrow S \vee W) \vdash W$
S60	$R \rightarrow \sim P, Q, Q \rightarrow (P \vee \sim S) \vdash S \rightarrow \sim R$
S61	$P \rightarrow Q, P \rightarrow R, P \rightarrow S, T \rightarrow (U \rightarrow (\sim V \rightarrow \sim S)),$ $Q \rightarrow T, R \rightarrow (W \rightarrow U), V \rightarrow \sim W, W \vdash \sim P$
S62	$P \leftrightarrow \sim Q \,\&\, S, P \,\&\, (\sim T \rightarrow \sim S) \vdash \sim Q \,\&\, T$
S63	$P \vee Q \leftrightarrow P \,\&\, Q \vdash P \leftrightarrow Q$

instância de substituição *Definição*. Uma **INSTÂNCIA DE SUBSTITUIÇÃO** de um sequente é o resultado de trocar uniformemente as suas letras sentenciais por fbf's.

Comentário. Esta definição atesta que cada ocorrência de uma dada letra sentencial deve ser trocada pela mesma fbf ao longo de todo o sequente.

Exemplo.
O sequente $P \vee Q \vdash \sim P \rightarrow Q$
tem como instância de substituição o sequente

$$(R \,\&\, S) \vee Q \vdash \sim(R \,\&\, S) \rightarrow Q$$

de acordo com o padrão de substituição

$$P/(R \,\&\, S);\ Q/Q.$$

Comentário. O padrão de substituição dado mostra que a letra sentencial P foi trocada, ao longo de todo o sequente original, pela fbf (R & S), e a letra sentencial Q foi trocada por ela mesma.

Exercício 1.5.3 Identifique cada um dos seguintes sequentes com os do exercício 1.5.1 e descubra o padrão de substituição.

i*	$R \rightarrow S \dashv\vdash \sim S \rightarrow \sim R$
ii*	$\sim P \rightarrow Q \vee R, Q \vee R \rightarrow S \vdash \sim P \rightarrow S$

iii*	$(P \& Q) \lor R \dashv\vdash R \lor (P \& Q)$
iv *	$(P \lor Q) \& (\sim R \lor \sim S) \dashv\vdash ((P \lor Q) \& \sim R) \lor ((P \lor Q) \& \sim S)$
v*	$R \lor S \dashv\vdash \sim\sim(R \lor S)$
vi*	$(P \lor R) \& S \dashv\vdash \sim(P \lor R \to \sim S)$
vii*	$P \lor (Q \lor R) \dashv\vdash \sim P \to Q \lor R$
viii*	$\sim(P \& Q) \vdash R \to \sim(P \& Q)$
ix*	$\sim((P \& Q) \lor (R \& S)) \dashv\vdash \sim(P \& Q) \& \sim(R \& S)$
x*	$P \lor (R \lor S), P \to Q \& R, R \lor S \to Q \& R \vdash Q \& R$

regra derivada

Comentário. Qualquer sequente que foi provado usando-se somente regras primitivas pode ulteriormente ser utilizado como **REGRA DERIVADA** de prova se

(i) algumas das proposições que aparecem na prova são as premissas do sequente, ou

(ii) algumas das proposições que aparecem na prova são as premissas de uma instância de substituição do sequente.

No caso (i), a conclusão do sequente pode ser asserida na própria linha; no caso (ii), a conclusão da *instância de substituição* pode ser asserida.

Anotação: Os números das linhas das premissas, seguido por S#, onde S# é o número dado no livro ou o nome do sequente (ver o comentário abaixo).

Conjunto de suposições: A união dos conjuntos de suposições das premissas.

Comentário. Todos os sequentes do exercício 1.5.1 (S11-S52) são usados tão frequentemente como regras de prova, que eles adquiriram os nomes ali indicados. (Na realidade, em alguns sistemas de lógica algumas das nossas regras derivadas são dadas como regras primitivas.)

Exemplos.

(a) Prove que $R \lor S \to T, \sim T \vdash \sim R$.

1	(1)	$R \vee S \to T$	A
2	(2)	$\sim T$	A
1,2	(3)	$\sim(R \vee S)$	1,2 MTT
1,2	(4)	$\sim R \;\&\; \sim S$	3 DM
1,2	(5)	$\sim R$	4 &E

(b) Prove $P \vee R \to S, T \to \sim S \vdash T \to \sim(P \vee R)$.

1	(1)	$P \vee R \to S$	A
2	(2)	$T \to \sim S$	A
1	(3)	$\sim S \to \sim(P \vee R)$	1 Trans
1,2	(4)	$T \to \sim(P \vee R)$	2,3 SH

Comentário. Exigir que o sequente a ser usado como regra derivada tenha sido provado utilizando-se somente regras primitivas é uma restrição desnecessária. Se os sequentes são provados numa ordem estrita, e nenhum sequente posterior da série é usado na prova de um sequente anterior, então não pode haver erros lógicos. Nós sugerimos a restrição mais forte somente porque é bom para a prática construir provas usando-se somente as regras primitivas.

Exercício 1.5.4

Prove os seguintes sequentes usando regras primitivas ou regras derivadas provenientes dos exercícios anteriores. Se você gosta de desafios, faça as provas das duas maneiras.

S 64	$\sim P \to P \dashv\vdash P$
S65	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash \sim((P \to Q) \to \sim(Q \to P))$
S66*	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash P \vee Q \to P \;\&\; Q$
S67*	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash \sim(P \vee Q) \vee \sim(\sim P \vee \sim Q)$
S68	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash \sim(P \;\&\; Q) \to \sim(P \vee Q)$
S69	$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash \sim(\sim(P \;\&\; Q) \;\&\; \sim(\sim P \;\&\; \sim Q))$
S70	$P \vee Q \to R \;\&\; \sim P\ , Q \vee R, \sim R \vdash C$
S71	$\sim P \leftrightarrow Q, P \to R, \sim R \vdash \sim Q \leftrightarrow R$
S72	$\sim((P \leftrightarrow \sim Q) \leftrightarrow R), S \to P \;\&\; (Q \;\&\; T),$ $R \vee (P \;\&\; S) \vdash S \;\&\; K \to R \;\&\; Q$
S73*	$(P \;\&\; Q) \vee (R \vee S) \vdash ((P \;\&\; Q) \vee R) \vee S$
S74	$P \;\&\; (\sim Q \& \sim R), P \to (\sim S \to T), \sim S \to (T \leftrightarrow R \vee Q) \vdash S$
S75	$P \;\&\; \sim Q \to \sim R, (\sim S \to \sim P) \leftrightarrow \sim R \vdash R \leftrightarrow Q \;\&\; (P \;\&\; \sim S)$
S76*	$P \vee Q, (Q \to R) \;\&\; (\sim P \vee S), Q \;\&\; R \to T \vdash T \vee S$
S77	$P \to Q \vee R, (\sim Q \;\&\; S) \vee (T \to \sim P), \sim(\sim R \to \sim P)$ $\vdash \sim T \;\&\; Q$
S78*	$P \vee Q, P \to (R \to \sim S), (\sim R \leftrightarrow T) \to \sim P \vdash S \;\&T \to Q$
S79*	$(P \leftrightarrow \sim Q) \to \sim R, (\sim P \;\&\; S) \vee (Q \& T), S \vee T \to R \vdash Q \to P$
S80*	$\sim S \vee (S \;\&\; R), (S \to R) \to P \vdash P$
S81*	$P \vee (R \vee Q, (R \to S) \;\&\; (Q \to T), S \vee T \to P \vee Q, \sim P \vdash Q$

S82*	$(P \to Q) \to R, S \to (\sim Q \to T) \vdash R \vee \sim T \to (S \to R)$
S83*	$P \,\&\, Q \to R \vee S \vdash (P \to R) \vee (Q \to S)$
S84*	$(P \to Q) \,\&\, (R \to P), (P \vee R) \,\&\, \sim(Q \,\&\, R) \vdash (P \,\&\, Q \,\&\, \sim R$
S85*	$P \,\&\, Q \to (R \vee S) \,\&\, \sim(R \,\&\, S), R \,\&\, Q \to S, S \to ((R \,\&\, Q) \vee (\sim R \,\&\, \sim Q)) \vee \sim P \vdash P \to \sim Q$
S86	$\sim(P \,\&\, \sim Q) \vee \sim(\sim R \,\&\, \sim S), \sim S \,\&\sim Q, T \to (\sim S \to \sim R \,\&\, P) \vdash \sim T$

1.6 Teoremas

teorema

Definição. Um **TEOREMA** é uma sentença que pode ser provada a partir de um conjunto vazio de premissas.

Comentário. Podemos afirmar que uma dada sentença é um teorema, apresentando-a como a conclusão de um sequente em que o lado esquerdo do símbolo de acarretamento esteja vazio.

Exemplo.
Prove que $\vdash P \,\&\, Q \to Q \,\&\, P$.

1	(1)	$P \,\&\, Q$	A
1	(2)	Q	1 & E
1	(3)	P	1 & E
1	(4)	$Q \,\&\, P$	2,3 & I
	(5)	$P \,\&\, Q \to Q \,\&\, P$	4 → I (1)

Comentário. Note que na linha (5) descarregamos a suposição 1. De modo que a conclusão final não se apoia em nenhuma suposição.

Exercício 1.6.1 Prove os seguintes teoremas, (i) usando somente regras primitivas e (ii) usando regras primitivas junto com as regras derivadas estabelecidas nos exercícios prévios.

T1*	$\vdash P \to P$	**Id**entidade
T2*	$\vdash P \vee \sim P$	**T**erço **E**xcluído
T3	$\vdash \sim (P \,\&\, \sim P)$	**N**ão-**C**ontradição
T4*	$\vdash P \to (Q \to P)$	**Enf**raquecimento

T5*	$\vdash (P \to Q) \lor (Q \to P)$	**P**aradoxo da **I**mplicação **M**aterial
T6	$\vdash P \leftrightarrow \sim\sim P$	**D**upla **N**egação
T7	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$	
T8*	$\vdash \sim (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \leftrightarrow Q)$	
T9*	$\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$	**L**ei de **P**eirce
T10*	$\vdash (P \to Q) \lor (Q \to R)$	
T11*	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \leftrightarrow \sim Q)$	
T12*	$\vdash (\sim P \to Q) \,\&\, (R \to Q) \leftrightarrow (P \to R) \to Q$	
T13*	$\vdash P \leftrightarrow P \,\&\, P$	**& Idem**potência
T14*	$\vdash P \leftrightarrow P \lor P$	∨ **Idem**potência
T15	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \,\&\, (R \leftrightarrow S) \to ((P \to R) \leftrightarrow (Q \to S))$	
T16	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \,\&\, (R \leftrightarrow S) \to (P \,\&\, R \leftrightarrow Q \,\&\, S)$	
T17*	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \,\&\, (R \leftrightarrow S) \to (P \lor R \leftrightarrow Q \lor S)$	
T18	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \,\&\, (R \leftrightarrow S) \to ((P \leftrightarrow R) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow S))$	
T19*	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \to ((R \to P) \leftrightarrow (R \to Q)) \,\&\, ((P \to R) \leftrightarrow (Q \to R))$	
T20	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \to (R \,\&\, P \leftrightarrow R \,\&\, Q)$	
T21*	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \to (R \lor P \leftrightarrow R \lor Q)$	
T22	$\vdash (P \leftrightarrow Q) \to ((R \leftrightarrow P) \leftrightarrow (R \leftrightarrow Q))$	
T23	$\vdash P \,\&\, (Q \leftrightarrow R) \to (P \,\&\, Q \leftrightarrow R)$	
T24	$\vdash P \to (Q \to R) \leftrightarrow ((P \to Q) \to (P \to R))$	
T25	$\vdash P \to (Q \to R) \leftrightarrow Q \to (P \to R)$	
T26	$\vdash P \to (P \to Q) \leftrightarrow P \to Q$	
T27*	$\vdash (P \to Q) \to Q \leftrightarrow (Q \to P) \to P$	
T28	$\vdash P \to \sim Q \leftrightarrow Q \to \sim P$	
T29	$\vdash \sim P \to P \leftrightarrow P$	
T30*	$\vdash (P \,\&\, Q) \lor (R \,\&\, S) \leftrightarrow ((P \lor R) \,\&\, (P \lor S)) \,\&\, ((Q \lor R) \,\&\, (Q \lor S))$	
T31*	$\vdash (P \lor Q) \,\&\, (R \lor S) \leftrightarrow ((P \,\&\, R) \lor (P \,\&\, S)) \lor ((Q \,\&\, R) \lor (Q \,\&\, S))$	
T32*	$\vdash (P \to Q) \,\&\, (R \to S) \leftrightarrow ((\sim P \,\&\, \sim R) \lor (\sim P \,\&\, S)) \lor ((Q \,\&\, \sim R) \lor (Q \,\&\, S))$	
T33	$\vdash (P \lor \sim P) \,\&\, Q \leftrightarrow Q$	
T34	$\vdash (P \,\&\, \sim P) \lor Q \leftrightarrow Q$	
T35	$\vdash P \lor (\sim P \,\&\, Q) \leftrightarrow P \lor Q$	
T36	$\vdash P \,\&\, (\sim P \lor Q) \leftrightarrow P \,\&\, Q$	
T37	$\vdash P \leftrightarrow P \lor (P \,\&\, Q)$	
T38	$\vdash P \leftrightarrow P \,\&\, (P \lor Q)$	
T39	$\vdash (P \to Q \,\&\, R) \to (P \,\&\, Q \leftrightarrow P \,\&\, R)$	

teoremas como regras derivadas

Comentário. Estamos considerando agora um caso especial do uso de sequentes como regras derivadas. Posto que é a conclusão de um sequente sem premissas, um teorema ou uma instância de substituição de um teorema pode ser escrito como uma linha de prova com um conjunto de suposições vazio. Para que um teorema possa ser usado desse modo, ele já deve ter sido provado mediante o uso exclusivo de regras primitivas. A anotação deve ser o nome do teorema ou T# (o número do teorema).

Exemplo.
Prove que $P \to Q, \sim P \to Q \vdash Q$.

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$\sim P \to Q$	A
	(3)	$P \vee \sim P$	T2
1,2	(4)	Q	1, 2, 3 DilSim

Comentário. No exemplo acima, a anotação da linha 3 dá o número do teorema introduzido. Dado, porém, que este teorema tem um nome, a anotação 'Terço Excluído' teria sido também aceitável.

Comentário. Tal como na introdução de sequentes, exigir que teoremas sejam provados em primeiro lugar utilizando-se somente regras primitivas é uma restrição desnecessária.

Exercício 1.6.2 Usando teoremas como regras derivadas, tente construir provas alternativas dos sequentes que aparecem no exercício 1.5.4.

Capítulo 2
Tabelas de Verdade

2.1 Tabelas de Verdade para Sentenças

valor de verdade

Definição. Verdade e Falsidade (abreviados como **V** e **F**) são **VALORES DE VERDADE**.

tabela de verdade

Comentário. Quando um argumento é válido, sua conclusão não pode ser falsa se suas premissas são todas verdadeiras. Uma das maneiras de descobrir se um argumento é válido é considerar explicitamente *todas as possíveis combinações* de valores de verdade entre as premissas e a conlcusão. Neste capítulo mostraremos como fazer isso. A ideia é atribuir valores de verdade variadamente às letras sentenciais do argumento e ver como as premissas e a conclusão se arranjam entre si. As regras a seguir, codificadas em **TABELAS DE VERDADE** (TVs), nos habilitam a fazer isso.

Comentário. Para que esse método funcione, é preciso que os valores de verdade das proposições componentes sejam determinados pelos valores de verdade das letras sentenciais que nelas aparece.

conectivos verifuncionais

Comentário. Todos os conectivos sentenciais introduzidos no Capítulo 1 têm a propriedade descrita no comentário prévio. Dado que os valores de verdade das sentenças compostas que contêm esses conectivos são *funções* dos valores de verdade das fbfs componentes, eles são conhecidos como CONECTIVOS VERIFUNCIONAIS. (Nem todos os conectivos da língua portuguesa são verifuncionais.)

TV para a negação

Para que a negação $\sim\varphi$ seja verdadeira, φ tem que ser falsa.

φ	$\sim \varphi$
V	F
F	V

Tabela 2.1 *Função de verdade para a negação*.

TV para a conjunção Para que a conjunção (φ & ψ) seja verdadeira, ambos os conjunctos, φ e ψ, têm que ser verdadeiros.

TV para a disjunção Para que a disjunção (φ ∨ ψ) seja falsa, ambos os disjunctos, φ e ψ, têm que ser falsos.

TV para o condicional Para que o condicional (φ → ψ) seja falso, o antecedente φ tem que ser verdadeiro, enquanto o consequente ψ tem que ser falso.

TV para o bicondicional Para que o bicondicional (φ ↔ ψ) seja verdadeiro, φ e ψ têm que ter o mesmo valor de verdade.

φ	ψ	φ & ψ	φ ∨ ψ	φ → ψ	φ ↔ ψ
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V

Tabela 2.2 *Funções de verdade para os conectivos binários*.

Comentário. Observe que se o antencedente de um condicional for falso, então o condicional é verdadeiro, não importa qual seja o valor de verdade do seu consequente. E também se o seu consequente for verdadeiro, então ele é verdadeiro qualquer que seja o valor de verdade do seu antecedente. Essas são as tabelas de verdade análogas das regras derivadas Antecedente Falso e Consequente Verdadeiro.

TV para as sentenças Por meio dessas regras podemos construir TVs para fbfs compostas, mostrando como os seus valores de verdade são determinados pelos valores de verdade das suas letras sentenciais.

Por exemplo.

P Q R	(P → Q) ∨ (~Q & R)
V V V	V V F F
V V F	V V F F
V F V	F V V V
V F F	F F V F
F V V	V V F F
F V F	V V F F
F F V	V V V V
F F F	V V V F
	(a) (d) (b)(c)

Tabela 2.3 *TV para a sentença (P → Q) ∨ (~Q & R)*

Comentário. Tomando como referência as colunas para P e Q, construímos a coluna (a) para (P → Q) usando a TV dos condicionais (veja a Tabela 2.2). A seguir, construímos a coluna (b), para ~Q (veja a Tabela 2.1). A coluna (c), para (~Q & R), foi construída tomando como referência as colunas dos seus conjunctos, ~Q e R, e utilizando a TV para a conjunção (veja a Tabela 2.2). Finalmente, construímos a coluna (d), para (P → Q) ∨ (~Q & R), tomando como referência os seus disjuntos, (P → Q) e (~Q & R) (veja a Tabela 2.2).

Comentário. A coluna para um dado componente de uma sentença (quando não for uma letra sentencial) é colocada sob o conectivo daquele componente. Por exemplo, a coluna para (P → Q) na Tabela 2.3 foi colocada sob a seta.

Exercício 2.1 Construa TVs para as seguintes sentenças.

i* P ∨ (~P ∨ Q)
ii* ~(P & Q) ∨ P
iii* ~(P → Q) → P
iv* (P ∨ Q) ∨ (~P & Q)
v* P ∨ Q → R ∨ ~P
vi* R ↔ ~P ∨ (R & Q)
vii* (P & Q ↔ Q) → (P → Q)
viii* (P ↔ ~Q) ↔ (~P ↔ ~Q)
ix* (P ↔ Q) ↔ (P ∨ R → (~Q → R))
x* (P & Q) ∨ (R & S) → (P & R) ∨ (Q & S)

Para uma prática adicional, construa TVs para as fbfs do Capítulo 1.