

Waismann, Ramsey, Wittgenstein e o Axioma da Redutibilidade

JOSÉ OSCAR DE ALMEIDA MARQUES
Departamento de Filosofia
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Universidade Estadual de Campinas
E-Mail: jmarques@unicamp.br
Web: <http://www.unicamp.br/~jmarques>

RESUMO: O axioma da redutibilidade – isto é, a tese de que para cada função proposicional existe outra função proposicional predicativa que é satisfeita pelos mesmos argumentos que satisfazem à primeira – desempenha um papel indispensável na reconstrução lógica da aritmética levada a cabo por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica*. Mas a admissão dessa tese entre os axiomas da lógica enfrentou fortes críticas pelo fato de que sua verdade (caso seja verdadeira) só poderia ter caráter empírico, e não lógico. Neste artigo examino de forma detalhada três argumentos clássicos nessa direção: os de Waismann (1928), Ramsey (1925) e Wittgenstein (1913), e procuro mostrar que, a despeito de ser cronologicamente o primeiro, o argumento de Wittgenstein parece ser o mais bem-sucedido dos três. Discuto, ao final, algumas consequências da reafirmação posterior de Wittgenstein, no *Tractatus*, do caráter empírico do axioma da redutibilidade, chamando a atenção para uma certa incoerência entre a manutenção dessa atitude e o novo tratamento que Wittgenstein deu ao axioma da infinitude, outra tese problemática dos *Principia Mathematica*.

ABSTRACT The so-called Axiom of Reducibility, that is, the thesis that for each propositional function there is another predicative propositional function of the same arguments and coextensive with the former, plays an indispensable role in the logical reconstruction of arithmetic as presented by Russell and Whitehead in *Principia Mathematica*. However, its admission among the axioms of logic theory has been widely criticized, on the grounds that its truth, if it is in fact true, would be merely empirical, not logical. I present in this paper a thorough examination of three classical arguments to this effect – those of Waismann (1928), Ramsey (1925) and Wittgenstein (1913) – and show that, in spite of being chronologically the first, Wittgenstein's argument still appears to be the most successful of them. In the last section, I discuss some consequences of Wittgenstein's later reaffirmation in the *Tractatus* that the Axiom of Reducibility expresses an empirical proposition, and I suggest that his unchanged attitude on the subject is at odds with his new treatment of another controversial thesis of *Principia Mathematica*, namely the Axiom of Infinity.

O Axioma da Redutibilidade é a proposição segundo a qual, dada uma função proposicional de ordem qualquer, que admite argumentos de certos tipos, há uma função proposicional *predicativa* com esses mesmos argumentos que é extensionalmente equivalente àquela função dada. Ele constitui um dos princípios mais característicos – e controversos – do sistema lógico desenvolvido por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica* (1910-13)¹, e recebe diversas formulações nessa obra, das quais nos limitaremos a considerar aquela referente a funções proposicionais que têm, como único argumento, uma variável para indivíduos. Sob esta forma, ele é enunciado na proposição:

$$*12.1 \quad |- (\exists f)(\phi x \equiv_x f !x) Pp,$$

¹As referências têm como base a edição *paperback*: RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica* to *56. Cambridge, Cambridge University, 1962.

na qual o ponto de exclamação indica que a função f , cuja existência é afirmada pelo axioma, é uma função predicativa, isto é, uma função que não envolve nenhuma variável quantificada (ou “aparente”, na terminologia dos *Principia*); ao passo que a função φ , que não recebe essa marca, constitui uma função de ordem indeterminada.

Russell e Whitehead viram-se obrigados a incluir esse axioma na base lógica de seu sistema como forma de conciliar duas exigências que, de outro modo, resultariam conflitantes. Eles se propuseram, de um lado, a levar a cabo o projeto logicista de fundamentação da Matemática, isto é, estabelecer de modo conclusivo que todos os enunciados da matemática ordinária podem ser formulados exclusivamente em termos de um repertório de noções lógicas fundamentais, e que todas as verdades matemáticas podem ser provadas a partir de um conjunto reduzido de proposições lógicas primitivas. Por outro lado, os autores dos *Principia* pretendiam desenvolver seu sistema de maneira coerente com a idéia de que a Lógica constitui uma disciplina de caráter absolutamente geral, situada na base de todos os raciocínios válidos e de todo discurso significativo. Enquanto a primeira exigência tornava imprescindível um tratamento das contradições de natureza lógico-matemática responsáveis pelo fracasso do projeto fregeano, a segunda exigência levou-os a estender esse tratamento a contradições de outra natureza, associadas às noções semânticas de verdade e denotação, e a Teoria (ramificada) dos Tipos foi a resposta encontrada por eles para fazer frente ao desafio conjunto oferecido por essas duas espécies de contradições. Mas essa resposta trouxe consigo uma grave inconveniência, pois, ao bloquear efetivamente certas inferências que permitiam a derivação de antinomias, a Teoria dos Tipos tornava igualmente ilegítimos uma série de raciocínios que são indispensáveis para se obter diversos resultados fundamentais nos campos da indução aritmética, da análise, e da teoria dos transfinitos. Diante dessa situação, a introdução do Axioma da Redutibilidade cumpriu a função de restabelecer o poder dedutivo da teoria para fins matemáticos, ao mesmo tempo em que se preservava o bloqueio das contradições conseguido por meio da Teoria dos Tipos.

Do ponto de vista de seu planejamento e execução, os *Principia Mathematica* são uma obra extraordinariamente bem-sucedida, e seus três volumes proporcionam uma efetiva reconstrução em termos lógicos de amplos domínios do conhecimento matemático. Mas essa reconstrução depende essencialmente de que se inclua o Axioma da Redutibilidade entre as proposições lógicas primitivas do sistema, e essa inclusão pareceu, desde o início, muito problemática aos olhos de diversos lógicos e matemáticos que se dedicavam, na época, aos estudos fundacionais. Os próprios Russell e Whitehead admitiram que o axioma não apresentava

a mesma auto-evidência das demais proposições primitivas de seu sistema, e justificaram sua aceitação por meio de considerações de caráter simplesmente indutivo: o axioma permitia obter os resultados desejados e não outros, e não se conhecia outra maneira plausível de obter esses resultados sem o uso do axioma.² Eles pensaram, portanto, que havia boas razões para se supor que o axioma é verdadeiro; e, dado que ele consiste em uma proposição absolutamente geral, que não se refere a nenhuma entidade particular específica mas é formulado apenas em termos de noções lógicas (isto é, quantificadores, variáveis, e operações verifuncionais), julgaram-se autorizados a classificá-lo entre as verdades propriamente lógicas de seu sistema.

Esse tipo de justificativa não foi suficiente, como era de se esperar, para convencer aqueles que não podiam admitir que as verdades da Matemática pudessem repousar em uma base meramente indutiva, e multiplicaram-se, nas décadas iniciais do século, as tentativas de fornecer uma fundamentação lógica da Matemática que prescindisse da admissão do problemático axioma. Uma alternativa que se tornou bastante favorecida consistiu na proposta de simplificação da Teoria dos Tipos dos *Principia*, de modo a fazê-la menos restritiva e tornar desnecessária a postulação do Axioma da Redutibilidade. O sistema lógico resultante dessa reformulação incorpora a assim chamada “Teoria Simples dos Tipos”; mas, embora essa solução seja suficiente para os propósitos de fundamentação da Matemática, ela envolve um abandono da concepção da Lógica como *characteristica universalis*, já que retira de sua alçada a resolução das contradições semânticas, cujo tratamento é transferido para disciplinas particulares como a epistemologia e a psicologia. Para os autores dos *Principia*, essa manobra não poderia deixar de parecer como um artifício *ad hoc*, desprovido de qualquer justificação conceitual ou filosófica; e é notável que, mesmo após as modificações posteriormente introduzidas na 2ª edição (1925-27) desse livro, com as quais pretendeu, sem sucesso, prescindir daquele axioma, Russell manteve intacta a estrutura ramificada de tipos lógicos destinada a bloquear as contradições semânticas.

Dentre os muitos ataques desferidos na literatura contra o Axioma da Redutibilidade estão as alegações de que ele destrói o caráter supostamente “construtivista” da lógica dos *Principia*, que o sistema obtido com sua introdução é indistinguível do sistema baseado na teoria simples dos tipos, e que ele reintroduz os paradoxos que a hierarquia ramificada dos tipos lógicos pretendia evitar. Nenhuma dessas críticas é procedente, mas não é delas que pretendo tratar neste trabalho. Vou examinar, antes, um tipo de argumento destinado a mostrar que, ainda que o

² *Principia*, p. 59.

Axioma da Redutibilidade seja verdadeiro, como supuseram os autores dos *Principia*, o mero fato de que sua formulação envolve apenas noções lógicas não é suficiente para outorgar-lhe o estatuto de uma verdade lógica. Na origem desse argumento está uma concepção da natureza da lógica radicalmente distinta daquela sustentada por Russell e Whitehead, que desenvolveu-se a partir das investigações iniciadas em 1913 por Ludwig Wittgenstein, e que recebeu sua expressão definitiva no *Tractatus Logico-Philosophicus*, cuja redação Wittgenstein concluiu em 1918. Segundo essa concepção, uma verdade lógica não se expressa meramente por meio de uma proposição completamente generalizada que seja verdadeira, mas apenas por meio de proposições cuja verdade é *necessária*, isto é, independente de quais sejam os fatos ou circunstâncias que, contingentemente, venham a ter lugar no mundo. Em outras palavras, as proposições logicamente verdadeiras devem ser verdadeiras “em todos os mundos possíveis” (para empregar a expressão de Leibniz), e não apenas no mundo real, isto é, no mundo que de fato existe. Para os autores dos *Principia*, as verdades da Lógica consistem nas verdades mais gerais acerca do mundo tal como ele está efetivamente configurado, e eles não se detêm em considerações acerca de outras configurações possíveis mas não realizadas. Para Wittgenstein, ao contrário, essa generalidade de base simplesmente fatural não pode ser a marca característica das proposições logicamente verdadeiras, pois a verdade destas proposições não diz o mínimo respeito aos fatos que ocorrem na realidade (mesmo que se trate dos fatos dotados de “máxima generalidade”), mas deve ser estabelecida a partir do exame da própria proposição. Proposições que expressam verdades lógicas são consistentes com qualquer configuração possível do mundo, do que se segue que elas são incapazes de transmitir qualquer informação acerca do estado efetivo do mundo, ou da realidade. Ou seja, elas não dizem propriamente nada, pois não autorizam a exclusão de nenhuma possibilidade; e, para enfatizar exatamente essa ausência de conteúdo significativo, Wittgenstein as denomina, caracteristicamente, “tautologias”.

Essas observações permitem indicar com precisão o tipo de crítica ao Axioma da Redutibilidade que vamos aqui examinar. Trata-se da afirmação de que a proposição enunciada por esse axioma *não é uma tautologia* e que, ainda que Russell e Whitehead estejam corretos em supô-la verdadeira, isto não teria a menor conseqüência para a legitimidade de sua admissão, em pé de igualdade, entre as demais proposições lógicas primitivas dos *Principia Mathematica*. Coube a Wittgenstein o mérito de ter indicado que, mesmo que uma proposição não mencione explicitamente nenhum constituinte particular do universo, sua verdade ou falsidade pode ainda assim depender dos fatos que contingentemente têm lugar nesse universo, e que a mera generalidade não se confunde com a necessidade que se exige das proposições da Lógica. Tal é,

exatamente a situação do Axioma da Redutibilidade: sua verdade, ainda que a admitamos, não será uma verdade necessária, mas apenas fatural. E os argumentos apresentados contra o caráter supostamente lógico desse axioma procuram, todos eles, demonstrar que, independentemente de ser ele verdadeiro no mundo real, *é possível conceber um mundo logicamente consistente em que ele seria falso*.

Tendo em vista esse objetivo geral, proponho-me, neste trabalho, a discutir três argumentos clássicos encontrados na literatura que pretendem estabelecer o caráter contingente, isto é, não-lógico, da proposição enunciada pelo Axioma da Redutibilidade, mediante a descrição de um mundo possível que falsificaria essa proposição. Os argumentos serão aqui examinados na ordem inversa à ordem cronológica em que foram formulados por seus autores, e isto por duas razões. Em primeiro lugar, porque desse modo a exposição ficará facilitada, já que as peculiaridades desses argumentos fazem com que a discussão das versões mais recentes seja útil para lançar luz sobre certos pontos mais obscuros das versões anteriores. E, em segundo lugar, porque assim se preparará melhor o caminho para uma inesperada conclusão acerca da eficácia relativa desses três argumentos.

As três primeiras seções deste trabalho estarão então dedicadas, respectivamente, aos argumentos oferecidos por Friedrich Waismann (1928), Frank P. Ramsey (1925), e pelo próprio Wittgenstein (1913). Examinarei, por fim, na última seção, algumas conseqüências da reafirmação por Wittgenstein, no *Tractatus*, da tese de que o Axioma da Redutibilidade pode ser falso, à luz de algumas doutrinas lógicas e ontológicas expostas nessa obra. Devo assumir, em tudo o que se segue, alguma familiaridade com os elementos básicos da Lógica dos *Principia Mathematica*.

1 O ARGUMENTO DE WAISMANN

Waismann expôs seu argumento contra o caráter lógico do Axioma da Redutibilidade em um pequeno artigo intitulado “Die Natur des Reduzibilitätsaxioms”³, publicado em 1928. Seu procedimento consiste, como já indicamos, em especificar um mundo (ou classe de mundos) em que se pode demonstrar que o Axioma da Redutibilidade não vigora. Disso se conclui que, independentemente da possibilidade de ser o axioma verdadeiro no mundo real, há pelo menos um mundo possível em que ele é falso, o que basta para estabelecer seu caráter contingente. E

³ *Monatshefte für Mathematik und Physik*, v. 35, p. 143-6, 1928. Seguimos a tradução para o inglês de Hans Kaal, publicada em WAISMANN, F. *Philosophical Papers*. Dordrecht: Reidel, 1977, p. 1-3.

óbvio que a eficácia do argumento depende de que o mundo assim especificado seja efetivamente um mundo consistente, o que exige que os requisitos que governam sua construção sejam mutuamente compatíveis.

Waismann começa propondo que imaginemos um mundo com as seguintes características:

- (1) Há nele um número infinito de indivíduos.
- (2) Cada indivíduo tem um número infinito de propriedades predicativas.⁴
- (3) Não há dois indivíduos que tenham todas as suas propriedades predicativas em comum.
- (4) Sempre que uma propriedade predicativa pertence a um indivíduo ela também pertence a algum outro indivíduo. Em outras palavras, não há uma propriedade predicativa que pertença exclusivamente a um único indivíduo.

A seguir, Waismann seleciona para consideração a seguinte função não predicativa:

$$(\varphi) (\varphi!x \equiv \varphi!a)$$

Em palavras, isto significa: “para toda função predicativa $\varphi!z$, x satisfaz $\varphi!z$ se e somente se a satisfaz $\varphi!z$ ”. Ou seja, trata-se de uma função de x que é satisfeita por todos os indivíduos que compartilham todas as suas propriedades predicativas com o indivíduo a . Ela não é uma função predicativa de x já que envolve a totalidade das funções predicativas de x e não pode, sob pena de instauração de um círculo vicioso, ser ela mesma uma das funções pertencentes à totalidade pressuposta em sua definição.⁵ No entanto, pelo Axioma da Redutibilidade, *deve existir* uma função predicativa $\psi!z$ que lhe é extensionalmente equivalente; isto é, o axioma implica:

$$(\exists \psi) (\psi!x \equiv_x (\varphi)(\varphi!x \equiv \varphi!a))$$

Contudo, afirma Waismann, as condições especificadas para o mundo em consideração *impedem* a existência, nesse mundo, de uma função predicativa com essa característica. Pois, pelo requisito (3), nenhum indivíduo tem todas as propriedades predicativas do indivíduo a ; assim, a função não-predicativa selecionada é satisfeita apenas pelo próprio a . Por outro lado, o requisito (4) veda a existência de uma função predicativa satisfeita exclusivamente por a . Em

⁴ Lembrar que uma propriedade predicativa de um indivíduo é uma função proposicional predicativa satisfeita por esse indivíduo, cf. *Principia*, p. 56 e 166.

⁵ *Principia*, p. 49. O chamado “princípio de círculo vicioso” está exposto nas páginas iniciais do capítulo 2 da Introdução à 1. ed. dos *Principia*.

conseqüência, não pode existir, no mundo considerado, uma função predicativa que seja coextensional à função (φ) ($\varphi!x \equiv \varphi!a$), e o Axioma da Redutibilidade falha.

A conclusão, portanto, parece imediata e inquestionável. Se houver efetivamente a possibilidade de um mundo que obedeça às condições estipuladas, o Axioma da Redutibilidade será falso nesse mundo. Mas é preciso, porém, examinar se as quatro condições indicadas são de fato compatíveis entre si, ou seja, se o mundo por elas descrito não seria porventura autocontraditório. O procedimento adotado por Waismann consiste em projetar os elementos de sua construção em um domínio bem conhecido de indivíduos, no qual se poderia estabelecer que os análogos daquelas condições não conduzem a nenhuma contradição, e que as condições introduzidas são, portanto, consistentes. O domínio escolhido é o domínio Q dos números racionais, e a projeção se realiza da seguinte maneira:

- (i) A cada indivíduo do mundo faz-se corresponder um número racional q pertencente a Q .
- (ii) Às propriedades predicativas de indivíduos faz-se corresponder classes de números racionais de acordo com a seguinte prescrição: ao número racional q corresponderão todos os intervalos abertos que contém q e são limitados por números racionais, à medida que esses intervalos caem sob o domínio Q , isto é, as intersecções desses intervalos com Q .

Este item (ii) merece certamente algumas observações. Note-se inicialmente que Waismann estipula, para fins de projeção, que se deve considerar apenas a intersecção dos intervalos abertos com o domínio Q , de tal modo que as propriedades predicativas sejam mapeadas em classes que contêm apenas números racionais, excluindo-se os irracionais contidos em cada intervalo. Além disso, os únicos intervalos abertos admitidos são aqueles limitados por números racionais, excluindo-se os que são definidos por meio de “cortes de Dedekind”. A razão dessas restrições, como Waismann nos informa ao final de seu artigo, é evitar as dificuldades ligadas às noções do contínuo real e de uma subclasse arbitrária de racionais, dificuldades essas que, em sua opinião, resultam em parte do próprio caráter do Axioma da Redutibilidade.

Em segundo lugar, cabe observar que a regra de projeção não está formulada com a clareza que seria desejável. Uma questão que permanece em aberto é se a relação entre um indivíduo e uma propriedade predicativa que ele exemplifica deve ou não ser preservada no domínio de projeção; isto é, se as propriedades predicativas de um dado indivíduo devem ou não ser mapeadas exclusivamente nas classes de racionais às quais pertence o número racional correspondente a esse indivíduo. Voltaremos mais tarde a este problema, examinando as conseqüências que se seguem de uma decisão a esse respeito.

Tendo definido o domínio e (admitamos) as regras de projeção, o próximo passo de Waismann é indicar que os análogos dos quatro requisitos originalmente formulados estão simultaneamente satisfeitos no domínio em questão:

- (1') Há infinitos números racionais.
- (2') Cada número racional está contido em infinitos intervalos.
- (3') Não há dois números racionais tais que um deles esteja contido em todos os intervalos em que o outro está contido.
- (4') Cada intervalo aberto contém mais de um número racional.

Com isto, Waismann considera estabelecido que as condições por ele especificadas são mutuamente compatíveis e determinam, portanto, a efetiva possibilidade de um mundo no qual estejam todas satisfeitas. Dado que, como já se viu, elas são tais que bloqueiam a possibilidade de que o Axioma da Redutibilidade venha a ser verdadeiro nesse mundo, parece estabelecido que há um mundo possível no qual a proposição enunciada pelo Axioma da Redutibilidade é falsa, o que basta para desqualificá-lo como uma proposição propriamente lógica.

Tendo apresentado o argumento de Waismann contra o alegado estatuto lógico do Axioma da Redutibilidade, passemos agora a uma avaliação crítica desse argumento. Observe-se, em primeiro lugar, que a condição (2), tal como está formulada, é vácuua, já que estará sempre satisfeita sejam quais forem as demais especificações adotadas na construção do contra-exemplo. Pois, dado que o número de funções predicativas (isto é, de expressões finitas sem quantificadores e contendo uma variável x) é necessariamente infinito, haverá infinitas funções predicativas da forma $(\phi!x \vee \sim\phi!x)$ que são analiticamente satisfeitas por qualquer indivíduo e constituem, assim, suas propriedades predicativas. É ocioso, então, exigir que cada indivíduo apresente infinitas propriedades predicativas, pois isso ocorre em qualquer circunstância.

O que provavelmente Waismann teve em mente é o requisito de que cada indivíduo apresente um número infinito de propriedades predicativas de *diferentes extensões*. E isto, de fato, é uma exigência implícita de seu exemplo, já que é apenas sob essa suposição que as condições (3) e (4) podem ser simultaneamente satisfeitas. Para verificar isto, basta notar que, de acordo com (4), para qualquer seleção *finita* de propriedades predicativas de um indivíduo, há ao menos um outro indivíduo que apresenta essas mesmas propriedades (pois, caso contrário, a conjunção de todas essas propriedades nos forneceria uma propriedade predicativa possuída por um único indivíduo). No entanto, segundo (3), esses dois indivíduos não podem ter *todas* as suas propriedades predicativas em comum, o que exige que haja, fora da seleção original, uma outra

função predicativa capaz de distingui-los, que não pode, portanto, ter a mesma extensão que qualquer uma das funções anteriormente selecionadas. Podemos, agora, acrescentar essa função – ou sua negação – ao conjunto original e repetir o raciocínio acima; o que mostra que, para que (3) e (4) possam ser ambas satisfeitas, é preciso que se tenha à disposição um número infinito de funções predicativas de diferentes extensões.

Uma conseqüência direta disto é que também é preciso contar com um número infinito de *indivíduos*. Pois é só sob essa suposição que se poderá dispor de um número infinito de classes de indivíduos que constituirão as possíveis extensões das propriedades predicativas acima consideradas.

Vemos, então, que os requisitos (1) e (2) – este último na versão modificada proposta acima – constituem simples pressupostos dos requisitos (3) e (4), pois estes não poderão jamais estar satisfeitos em um mundo que não disponha de infinitos indivíduos e de infinitas funções predicativas de diferentes extensões. Admitindo-se, então, que isto é uma condição necessária para a possibilidade de atendimento simultâneo das exigências introduzidas por (3) e (4), a questão crucial que temos de considerar agora é se temos, aí, também uma condição *suficiente* para essa possibilidade. Ou seja, bastaria a presença de infinitos indivíduos e de infinitas funções não-coextensivas para assegurar a efetiva possibilidade de um mundo tal como especificado por Waismann? Antes de examinar a prova indireta de consistência que ele oferece, talvez seja útil fazer uma representação esquemática e meramente ilustrativa do que está em jogo nessa suposição.

Considere-se a tabela a seguir, supondo-a estendida indefinidamente para baixo e para a direita. As linhas correspondem aos indivíduos e as colunas correspondem a funções predicativas de indivíduos.⁶ A presença de um sinal “+” na intersecção de uma linha e de uma coluna indica que o indivíduo associado àquela linha concorda com o indivíduo *a* quanto à satisfação ou não-satisfação da função predicativa associada àquela coluna.

⁶ Esta tabela, assim como as outras que serão apresentadas nas próximas seções, tem simplesmente um papel ilustrativo para a compreensão do argumento. Haveria certamente dificuldades em supor uma tabela dessa espécie se houvesse uma quantidade não-enumerável de indivíduos ou de funções predicativas no modelo.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5 ...
a	+	+	+	+	+
b					
c					
d					
e					
\vdots					
\vdots					

A primeira linha estará, portanto, totalmente preenchida com o sinal “+”, dado que obviamente o indivíduo a concorda consigo mesmo quanto à satisfação ou não-satisfação das funções predicativas F_1, F_2 , etc. O problema que se coloca é o da possibilidade, em princípio, de preencher a tabela com sinais “+” e “-” (este último para indicar que um indivíduo *não* concorda com o indivíduo a em relação a uma certa função predicativa), de tal modo que não haja nenhuma outra linha contendo apenas o sinal “+” e que, para qualquer seleção finita de colunas, exista ao menos uma outra linha além da primeira que contém um sinal “+” em todas essas colunas. Note-se que os requisitos aqui introduzidos são menos restritivos que os apresentados por Waismann, pois estamos exigindo apenas de *um* determinado indivíduo aquilo que ele exige de todos. Mas esses requisitos mais flexíveis já bastariam, se fossem atendidos, para estabelecer a falsidade do Axioma da Redutibilidade, pois estaria excluída, nessa situação, a existência de uma função predicativa $\psi!z$ tal que $\psi!x \equiv_x (\varphi)(\varphi!x \equiv \varphi!a)$

Há, porém, uma enganosa simplicidade no problema tal como o formulamos, e um pouco de reflexão basta para mostrar que não temos, aí, um simples exercício de análise combinatória. Pois as funções predicativas mantêm entre si certas relações lógicas que impossibilitam o preenchimento arbitrário das posições de uma linha sem que se leve em consideração como outras posições estão ou serão preenchidas. Assim, se a função F_1 , por exemplo, consiste na conjunção das funções F_2 e F_3 , todas as linhas preenchidas com um “+” na posição correspondente a F_1 devem obrigatoriamente levar também um “+” nas posições que correspondem a F_2 e F_3 , e assim sucessivamente, para todos os casos de composições verifuncionais de funções. Isto significa que não se pode esperar fornecer uma prova direta da consistência dos requisitos especificados – nem mesmo na versão mais flexível em que os formulamos acima - através de uma regra mecânica que permitisse o preenchimento de todas as posições da tabela de modo a obter uma configuração do tipo desejado.

A prova de que o mundo imaginado por Waismann como um contra-exemplo ao Axioma da Redutibilidade é efetivamente um mundo possível do ponto de vista lógico só pode, portanto, ser tentada por via indireta; e esse, de fato, é o caminho seguido por Waismann. Resta, então, examinar se a prova por ele oferecida (cuja sugestão ele credita a Carnap) cumpre o que dela se esperaria. Para encaminhar essa discussão, é preciso retomar a questão que deixamos anteriormente em suspenso, e que diz respeito ao funcionamento da regra de projeção das propriedades predicativas de indivíduos no domínio dos intervalos abertos de números racionais (entendendo-se esse domínio, como já se indicou, como constituído pelas classes dos números racionais pertencentes a intervalos abertos limitados por números racionais). O ponto em questão, como se lembrará, é se as relações de satisfação e não-satisfação que vigoram entre um determinado indivíduo e as funções predicativas que, respectivamente, são e não são suas propriedades predicativas devem ser obrigatoriamente espelhadas no domínio de projeção, de tal modo que o número correspondente àquele indivíduo respectivamente pertença e não pertença aos intervalos abertos que correspondem àquelas funções predicativas.

Suponhamos, inicialmente, que se aceite (como é plausível) essa exigência. Nesse caso, será fácil constatar que o modelo matemático de Waismann não permite um mapeamento coerente do domínio das propriedades predicativas de indivíduos. Tome-se, por exemplo, duas funções predicativas $F!x$ e $G!x$ que não tenham parte de suas extensões em comum, ou seja, que sejam tais que nenhum indivíduo exemplifique ambas como suas propriedades predicativas. Elas deverão, conseqüentemente, ser projetadas em intervalos abertos disjuntos, isto é, que não têm um segmento em comum. Considere-se agora a função $F!x \vee G!x$, que constitui uma propriedade predicativa de qualquer indivíduo que satisfaça uma das duas funções anteriores. É óbvio que a coerência do modelo exigiria que ela fosse mapeada sobre a união dos intervalos correspondentes a $F!x$ e $G!x$, mas esta união (embora constitua topologicamente um *conjunto* aberto) não forma um *intervalo* aberto, como exige o modelo de Waismann.

Uma dificuldade semelhante surge no caso do mapeamento das negações de funções predicativas. A função $\sim F!x$ constitui uma propriedade predicativa de todos os indivíduos que não satisfazem $F!x$; assim, se $F!x$ for projetada em um certo intervalo aberto, $\sim F!x$ deveria obrigatoriamente ser projetada no seu *complemento*, o qual tampouco é um intervalo aberto. Note-se, por fim, que uma função como $F!x \vee \sim F!x$, que é uma propriedade predicativa comum a todos os indivíduos, deveria corresponder à totalidade do domínio Q , o qual não forma, porém, um intervalo aberto *limitado* por números racionais.

Está claro, portanto, que a regra de projeção de propriedades predicativas, na interpretação considerada, inviabiliza o modelo matemático proposto por Waismann, já que haveria um número infinito de propriedades predicativas incapazes de representação coerente nesse modelo. As dificuldades assinaladas, entretanto, são demasiado óbvias para que se suponha que possam ter passado despercebidas a Waismann durante a elaboração de seu argumento, e isso nos leva a considerar a possibilidade de que o tipo de projeção que ele tinha em mente não visava estabelecer, no domínio Q , uma estrutura que fosse isomórfica à estrutura de um mundo possível determinado pelas condições (1)–(4), e que tudo o que se pretende é que cada propriedade predicativa de indivíduos seja mapeada em *algum* intervalo aberto de números racionais, de tal modo que, tendo projetado $F!x$ em um certo intervalo aberto, estaremos livres para projetar $\sim F!x$ em *qualquer* outro intervalo, independentemente de considerações sobre se esses intervalos preservam entre si as relações lógicas (ou seus análogos) vigentes entre as propriedades projetadas.

Se entendermos a regra de projeção desse modo, as dificuldades mencionadas desaparecerão, mas abre-se, em contrapartida, um espaço para a objeção de que o argumento de Waismann não permite, afinal, estabelecer aquilo a que se propôs. Pois tudo o que se demonstra agora é que as condições (1)–(4) – convenientemente formalizadas – podem ser tomadas como axiomas não-lógicos de uma teoria formal não-interpretada, e o fato de que essa teoria tem um modelo, ou interpretação que verifica os axiomas, determina, é certo, que esses axiomas são consistentes, mas num sentido puramente lógico, que se atém apenas às determinações formalmente introduzidas nesses axiomas. Em outras palavras, o modelo de Waismann-Carnap prova a consistência das condições (1)–(4) desde que os termos “indivíduo” e “propriedade predicativa” que nelas ocorrem sejam tomados como meros símbolos desprovidos de qualquer interpretação antecedente, e, em conseqüência, desprovidos dos significados que lhes são atribuídos no sistema dos *Principia Mathematica*. Para ver a falácia da argumentação de Waismann, basta notar que o modelo matemático proposto seria igualmente suficiente para provar a “possibilidade” de um mundo em que houvesse infinitos filhos, cada filho tendo infinitos pais, etc. – desde, é claro, que nos abstivéssemos de dar às palavras “pai” e “filho” seus significados habituais. Parece-me que as razões que naturalmente nos levam a recusar uma tal “prova de possibilidade” neste último caso são exatamente as mesmas que devem ser levantadas contra a prova de Waismann de que as quatro condições especificadas poderiam ser conjuntamente satisfeitas no sistema dos *Principia Mathematica*.

Assim, um exame atento do argumento de Waismann em favor do caráter contingente do Axioma da Redutibilidade revela que esse argumento não é conclusivo. Ele é capaz, efetivamente, de estabelecer que, se os requisitos introduzidos puderem determinar um mundo possível, o Axioma da Redutibilidade será falso nesse mundo. Mas permanece a dúvida sobre a consistência desses requisitos e, conseqüentemente, sobre a possibilidade de haver um mundo em que o Axioma da Redutibilidade seja falso.

O leitor deverá atentar para o fato de que minhas observações restringiram-se à avaliação do argumento tal como foi apresentado por Waismann, e não pretenderam decidir se os seus requisitos (1)–(4) são ou não são, de fato, compatíveis entre si. Em particular, não estou excluindo a possibilidade de se chegar a fornecer uma prova da consistência desses requisitos por meio de um modelo matemático mais complexo, capaz de dar conta das relações conceituais que vigoram entre as noções de indivíduo e de propriedade predicativa. Entre os aspectos essenciais dessas noções que deveriam plausivelmente ser capturados pelo modelo estão, por exemplo, o fato de que se duas funções são propriedades predicativas de um certo indivíduo, então, a disjunção e a conjunção dessas funções também serão suas propriedades, e a negação de qualquer uma delas não o será. No entanto, se pretendermos introduzir explicitamente todas essas condições no modelo estaremos às voltas com um inevitável elemento de arbitrariedade.⁷ Pois essas condições não são senão a transcrição da estrutura axiomática que estamos dispostos a admitir como critério para decidir sobre a consistência de uma dada teoria, e estamos livres para incorporar tantos axiomas quantos julgarmos necessários para definir os aspectos que consideramos como essenciais na noção de propriedade predicativa. Nesse caso, é claro que semelhantes provas do estatuto contingente do Axioma de Redutibilidade somente poderão ser entendidas como provas de que a proposição enunciada por esse axioma é independente dos demais axiomas do cálculo que estamos dispostos a aceitar, e poderiam ser recusadas por alguém que afirmasse que a noção de propriedade predicativa está intrinsecamente determinada, em parte, pelas características que lhe são conferidas pelo próprio Axioma da Redutibilidade.

⁷ Como me fez notar o Prof. José Alexandre Guerzoni – a quem devo, além disso, importantes observações sobre uma versão preliminar desta seção.

2 O ARGUMENTO DE RAMSEY

O argumento de Ramsey para estabelecer o caráter não-lógico do Axioma da Redutibilidade figura em seu importante trabalho, “The Foundations of Mathematics”⁸, publicado em 1925, no qual foram lançadas as bases para a simplificação da Teoria dos Tipos à qual já nos referimos anteriormente. O procedimento de Ramsey, em seu argumento, é análogo ao de Waismann, e consiste na especificação de um mundo possível no qual a proposição enunciada pelo Axioma da Redutibilidade se revelaria falsa. O argumento é exposto em poucas linhas:

O Axioma da Redutibilidade não é uma tautologia, mas pode ser falso. Pois é claramente possível que houvesse uma infinidade de funções atômicas e um indivíduo a tal que, para qualquer função atômica selecionada, exista um indivíduo que concorda com a quanto a todas as outras funções mas não quanto à função selecionada. Nesse caso, $(\varphi)(\varphi!x \equiv \varphi!a)$ não poderia ser equivalente a qualquer função elementar de x .⁹

Do mesmo modo como procedemos no caso do contra-exemplo de Waismann, vamos examinar se e como as condições que Ramsey estabelece são capazes de determinar um mundo que não obedece ao Axioma da Redutibilidade; e, a seguir, verificar se essas condições são consistentes. Antes de enunciar seu argumento, Ramsey afirmou que várias configurações poderiam ser pesquisadas, e que ele iria limitar-se à consideração da mais interessante dentre elas, a saber, aquela em que o número de indivíduos e o número de funções atômicas são ambos

⁸ *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 25, p. 338-84, 1925; reimpresso em diversas coletâneas de trabalhos de Ramsey. O argumento encontra-se à p. 57 de RAMSEY, F. P. *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*. Londres: Routledge & Kegan Paul, 1931 e à p. 208 de RAMSEY, F. P. *Foundations: Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics*. Londres: Routledge & Kegan Paul, 1978.

⁹ A conclusão de Ramsey é que nenhuma função *elementar* de x pode ser equivalente à função $(\varphi)(\varphi!x \equiv \varphi!a)$, e isto levou Hochberg (Russell, Ramsey and Wittgenstein on Ramification and Quantification. *Erkenntnis*, v. 27, p. 263-4, 1987) a criticar seu argumento sob a alegação de que o Axioma da Redutibilidade diz respeito não a funções elementares mas a funções de 1ª ordem, e que as condições que Ramsey especifica não são suficientes para excluir a possibilidade de que haja uma função de 1ª ordem da forma $(y) xRy$ equivalente à função acima considerada. Contra Hochberg, deve-se assinalar que o Axioma da Redutibilidade diz respeito, mais exatamente, a funções *predicativas*; e, embora na Introdução dos *Principia* as funções predicativas de indivíduos tenham sido identificadas a funções de 1ª ordem (p. 51-3), Russell e Whitehead afirmam claramente, na seção *12, que funções predicativas são funções *elementares* (p. 162), ou, o que dá no mesmo, são *matrizes* (p. 164 e 167); assim, uma função como $(y) xRy$ não conta como uma função predicativa. Como eles deixam claro no Prefácio (p. vii), as caracterizações oferecidas na Introdução constituem apenas esclarecimentos preliminares que não fazem parte da cadeia de deduções; e, referindo-se às diferentes exposições da hierarquia funcional apresentadas na Introdução e no corpo do texto (o que inclui as diferentes caracterizações de predicatividade), enfatizam que é a exposição oferecida em *12 que deve ser assumida no desenrolar da discussão. Portanto, o argumento de Ramsey está perfeitamente de acordo com a teoria dos *Principia*, e a objeção de Hochberg não é pertinente, pois uma função elementar de indivíduos é *exatamente o mesmo* que uma função predicativa de indivíduos. O emprego da primeira denominação por parte de Ramsey deve-se simplesmente ao fato de que, em seu artigo, ele atribuiu ao termo “função predicativa” um sentido diverso daquele que lhe é atribuído nos *Principia Mathematica* (Cf. *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, p. 26 e 38; e *Foundations*, p. 177 e 189).

infinitos. Creio que seria igualmente interessante examinar se, na ausência dessas condições, permanece a possibilidade de montar um contra-exemplo efetivo ao Axioma da Redutibilidade, e voltarei brevemente a esse ponto logo mais. No momento, basta notar que elas são exigidas no modelo proposto. Passemos, então, à consideração dos requisitos que Ramsey estipula. Separadamente, eles são:

- (1) Há um número infinito de indivíduos.
- (2) Há um número infinito de funções atômicas de indivíduos.
- (3) Há um indivíduo a tal que, para qualquer função atômica que se escolha, existe um outro indivíduo que concorda com a quanto a todas as outras funções, mas não quanto à função escolhida.

O requisito (1) coincide com o primeiro requisito do exemplo de Waismann, e é fácil ver, mais uma vez, que ele é necessário para que os demais requisitos possam ser simultaneamente satisfeitos. Quanto a estes últimos, porém, eles apresentam uma significativa diferença frente aos requisitos formulados por Waismann, pelo emprego da noção de função *atômica*, em lugar da noção de função predicativa. Isto necessita, portanto, de alguns comentários. ,

Em analogia com as funções elementares dos *Principia* (p. 92 e 127), uma função atômica poderia ser caracterizada como uma função cujos valores são *proposições atômicas*. Mais precisamente, uma função atômica de um indivíduo é uma expressão que contém uma variável individual x e que se torna uma proposição atômica quando um certo valor (um indivíduo determinado) é atribuído a x . O fato de que Ramsey tenha formulado suas condições em termos de funções atômicas tem a virtude de simplificar, como veremos, a discussão da consistência de seu modelo, mas é preciso reconhecer que isto significa dar um passo além do aparato conceitual explicitamente utilizado na construção do sistema lógico dos *Principia Mathematica*, 1ª edição. É verdade que a noção de proposição atômica foi subseqüentemente adotada na reformulação do sistema esboçada na Introdução à 2ª edição, mas, dado que essa reformulação teve como característica mais importante justamente o abandono do Axioma da Redutibilidade, é preciso uma certa cautela antes de lançar mão, numa discussão crítica desse axioma, de uma noção que não figurava no contexto em que ele foi enunciado. Pois o que se pretende mostrar é que o Axioma da Redutibilidade não é uma tautologia *no sistema original dos Principia*, e, para isso, é preciso estar atento para que a adoção de proposições e funções atômicas não traga consigo elementos capazes de alterar substancialmente esse sistema.

Feitas essas observações, parece plausível supor, no entanto, que a existência de proposições atômicas – isto é, proposições que não contêm outras proposições como suas partes, segundo a caracterização oferecida na Introdução à 2ª edição dos *Principia* (p. xv) – está tacitamente pressuposta no sistema original dos *Principia*, e só não foi explicitamente tematizada porque seu tratamento exigiria uma discussão sobre os constituintes últimos da realidade ou da experiência, assuntos sobre os quais Russell não tinha (como, de resto, nunca chegou a ter) uma opinião formada. Mas, principalmente, porque tais discussões não eram relevantes para os objetivos declarados dos *Principia*, que consistiam na busca de uma fundamentação lógica da Matemática; e seus autores estavam particularmente desejosos de evitar que suas conclusões, importantes como lhes pareciam, viessem a diluir-se em controvérsias desnecessárias acerca de tópicos de filosofia geral¹⁰.

Para fins matemáticos, portanto, a Lógica pode começar diretamente pelas proposições elementares, caracterizadas como aquelas proposições que não envolvem variáveis aparentes, isto é, quantificadores (Cf. *Principia*, p. 91, 127 e 161). Proposições elementares podem constituir-se como agregados de proposições elementares mais simples, obtidos por meio dos operadores verifuncionais de conjunção, disjunção, negação, etc. (p. 91) e, possivelmente, de operadores não-extensionais (p. 8). Mas, dado que uma proposição não pode ter uma complexidade infinita (p. 50), é inevitável a conclusão de que, em algum ponto da análise, chegar-se-á a proposições elementares que não têm partes que sejam proposições, ou seja, às proposições atômicas. Vê-se, portanto, que estas proposições estão implícitas já na 1ª edição dos *Principia*, embora não sejam mencionadas separadamente das demais proposições elementares.

Aceitemos, então, que a noção de proposição atômica e a noção correlata de função atômica de indivíduos não são, em princípio, estranhas ao sistema lógico original de Russell e Whitehead, e que Ramsey pode legitimamente empregá-las nas especificações de seu modelo. Vejamos agora as conseqüências dessas especificações com relação à tese enunciada pelo Axioma da Redutibilidade.

A função não-predicativa que Ramsey escolhe para testar a validade do Axioma é a mesma escolhida por Waismann, isto é, $(\phi)(\phi!x \equiv \phi!a)$. Essa função, como vimos, é satisfeita por todos os indivíduos que compartilham suas propriedades predicativas com o indivíduo a , ou seja, que concordam com esse indivíduo em relação a todas as funções predicativas. Segundo o

¹⁰ *Principia*, p. vii e os comentários em RUSSELL, B. *My Philosophical Development*, Cap. 7.

Axioma da Redutibilidade, deve existir uma função predicativa satisfeita exatamente pelos mesmos indivíduos que satisfazem a função não-predicativa $(\varphi)(\varphi!x \equiv \varphi!a)$. Para mostrar a falha do Axioma da Redutibilidade bastará mostrar, então, que as condições que Ramsey estipula bloqueiam efetivamente a existência de uma tal função.

Ramsey parece supor que uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo concorde com a em todas as funções predicativas é que ele concorde com a em todas as funções atômicas. Vamos discutir à frente o que está por trás desta idéia. Para prosseguir, vamos admitir que o problema se coloca sob a forma de encontrar uma função predicativa $\psi!x$ que seja equivalente à função

$$(\varphi) (\varphi_{at}x \equiv \varphi_{at}a),$$

na qual φ_{at} é uma variável para funções atômicas. Esta é uma função não-predicativa de x , que cai, portanto, sob o âmbito da tese do Axioma da Redutibilidade. Examinemos, então, em que medida as condições de Ramsey impedem a resolução do problema sob esta última forma.

Se o número de funções atômicas do modelo fosse finito, $\psi!x$ poderia ser facilmente determinada fazendo-se a conjunção de todas as funções atômicas satisfeitas pelo indivíduo a , e das negações de todas as que a não satisfaz¹¹ (Cf. *Principia*, p. 56n e 59n). Mas o requisito (2) inviabiliza esse procedimento, embora ele não baste, por si só, para estabelecer a *impossibilidade* de que se venha a obter, de maneira fortuita, um resultado equivalente por meio de uma composição de um número finito dessas funções atômicas. Isto, porém, está efetivamente excluído dada a condição introduzida pelo requisito (3). De fato, seja qual for a função predicativa $\psi!x$ construída a partir da agregação verifuncional de funções atômicas, o fato de que esse agregado envolve apenas um número finito de funções faz com que haja, necessariamente, infinitas funções atômicas que não tomam parte na construção de $\psi!x$. E, para cada uma dessas funções, haverá, por hipótese, indivíduos que discordam do indivíduo a quanto a essa função, embora concordem com ele em relação a todas as demais funções atômicas, e, por conseguinte, em relação a todas aquelas funções empregadas na construção de $\psi!x$. Segue-se, então, que $\psi!x$ não poderá ser equivalente à função não-predicativa $(\varphi) (\varphi_{at} \equiv \varphi_{at}a)$, pois, seja ela qual for, ela admitirá em sua extensão indivíduos (e, na verdade, uma infinidade deles) que não concordam

¹¹ Vemos, portanto, que a existência no modelo de um número infinito de funções atômicas não-coextensivas e, conseqüentemente, de um número infinito de indivíduos não caracteriza meramente o caso “mais interessante”, mas

com o indivíduo a em relação a todas as funções atômicas. Conseqüentemente, não há uma função predicativa equivalente a essa função, e o Axioma da Redutibilidade falha nesse modelo.

Antes de passarmos ao exame da correção desse argumento, vamos considerar a questão da consistência das condições impostas ao modelo. Ramsey não apresenta nenhum argumento nesse sentido, mas apenas afirma que “é claramente possível” que elas sejam satisfeitas. E é claro que o que ele tem em vista, aqui, é a idéia de independência lógica entre as funções atômicas de seu modelo, o que permite uma total liberdade na designação das funções que cada indivíduo satisfaz e das que não satisfaz. Para ver isto, retomemos a tabela apresentada na seção anterior, supondo agora que F_1, F_2 , etc. não são mais funções predicativas quaisquer de indivíduos, mas funções *atômicas*.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	...
a	+	+	+	+	+	
b	-	+	+	+	+	
c	+	-	+	+	+	
d	+	+	-	+	+	
e	+	+	+	-	+	
⋮						
⋮						

O teste de consistência do modelo reduz-se, então, a decidir se é possível, em princípio, preencher a tabela com sinais “+” e “-” de tal modo que, para qualquer coluna selecionada, exista uma linha que contém um sinal “-” na posição correspondente àquela coluna e um sinal “+” em todas as outras posições.

É fácil ver que é possível realizar esse preenchimento mecanicamente, usando, por exemplo, uma “regra da diagonal”, como indicado acima. Note-se que o que é necessário para atender às especificações de Ramsey é apenas que a tabela contenha um número infinito de linhas como as apresentadas, não se excluindo a presença de *outras* linhas completamente arbitrárias, ou mesmo de linhas idênticas à linha a . O modelo não exige, como no caso do modelo de Waismann, que a seja um indivíduo distinguível de todos os demais. Mas não é nisso que reside a diferença mais significativa entre os dois modelos. O ponto mais importante é que, dado que as colunas correspondem agora a funções atômicas, não estamos mais obrigados a levar em conta as

constitui, de fato, a única configuração em que um argumento desse tipo contra o Axioma da Redutibilidade pode ser plausivelmente formulado.

complexas relações de interdependência que vigoravam no caso das funções predicativas e que impunham restrições às possíveis maneiras de distribuir os sinais “+” e “-” no interior da tabela, pois as funções atômicas, por definição, não contêm conectivos lógicos e não apresentam, entre si, os vínculos instaurados pela presença desses conectivos. A consequência disto é que *todas* as distribuições daqueles sinais são consistentes (excetuando-se, é claro, o caso da linha *a*, que deve conter apenas o sinal “+”) e, em particular, também são consistentes as distribuições efetuadas segundo a “regra da diagonal” , que são distribuições que atendem os requisitos formulados para o modelo de Ramsey. Isto significa que, ao contrário do contra-exemplo de Waismann, o mundo que Ramsey apresenta é, pelo menos à primeira vista, um mundo efetivamente possível do ponto de vista lógico.

A qualificação “à primeira vista” é, não obstante, necessária, pois as considerações acima oferecidas em favor da consistência do modelo de Ramsey envolvem, implicitamente, certas suposições adicionais, que é preciso, agora, examinar. De fato, está-se supondo que todas as relações de interdependência entre funções predicativas derivam exclusivamente dos conectivos lógicos que podem estar presentes nessas funções. E disto se conclui que, dado que funções atômicas não envolvem tais conectivos, o fato de que um indivíduo satisfaça ou não uma função atômica é compatível com sua satisfação ou não-satisfação de qualquer outra função dessa espécie. O que está por trás desta idéia é a tese wittgensteiniana, expressa no *Tractatus Logico-Philosophicus*, de que todas as proposições atômicas (que são as proposições obtidas pela designação de um valor determinado à variável individual de uma função atômica de indivíduos) são logicamente independentes, ou seja, que a verdade ou falsidade de cada uma delas não traz qualquer implicação quanto à verdade ou falsidade das demais. Ora, embora tenhamos admitido que proposições atômicas estão implicitamente envolvidas no sistema lógico dos *Principia Mathematica*, 1^o edição, não há nada ali que nos obrigue a aceitar que a tese da independência vale para essas proposições. E mesmo na Introdução à 2^o edição, na qual proposições atômicas são explicitamente introduzidas, nada é afirmado sobre serem elas logicamente independentes umas das outras. De fato, é perfeitamente plausível afirmar que Russell e Whitehead considerariam as proposições “isto é verde” e “isto é vermelho” como exemplos canônicos de proposições atômicas, as quais, não obstante, não podem ser ambas verdadeiras se “isto” designa, nos dois casos, o mesmo indivíduo. Segue-se que a satisfação ou não-satisfação de uma função atômica por parte de um indivíduo *pode* ter consequências para sua satisfação ou não satisfação de outras funções atômicas, embora essas consequências não decorram de conexões estabelecidas

por meio de noções puramente lógicas, mas digam respeito ao conteúdo semântico, intensional, dos predicados envolvidos nessas funções.

Estas considerações indicam que não podemos mais estar absolutamente seguros de que uma configuração que atenda aos requisitos de Ramsey é efetivamente possível; ou, para voltar à nossa tabela ilustrativa, que o preenchimento de uma certa posição de uma linha qualquer com o sinal “-” é consistente com o preenchimento de *todas* as demais posições dessa linha com o sinal “+”. A aplicabilidade, em princípio, da “regra da diagonal” pressupõe a total independência recíproca das funções atômicas do modelo, mas isto, como vimos, não é um traço constitutivo do sistema lógico dos *Principia*, e não há nada, nas condições que Ramsey formula para seu modelo, que permita estabelecer a validade dessa suposição.

Ao lado da dificuldade mencionada, é preciso indicar também a possibilidade de conexões lógicas entre funções atômicas derivadas da natureza *relacional* de algumas dessas funções. Assim, se o indivíduo *a* satisfaz a função xRb , então, o indivíduo *b* deverá necessariamente satisfazer a função aRx ; e a consideração destes casos introduz novas restrições quanto às formas permissíveis de preenchimento da tabela. Note-se que este problema persiste mesmo que se suponha a independência lógica das proposições atômicas, pois, no exemplo apresentado, só está envolvida uma única proposição atômica, a saber, aRb . Voltaremos a este problema na próxima seção, ao discutir o argumento de Wittgenstein contra o Axioma da Redutibilidade. Basta notar, aqui, que isso traz uma dificuldade adicional para a demonstração da consistência das condições que Ramsey impõe a seu modelo.

Vamos admitir, contudo, que esses problemas possam ser resolvidos por meio de estipulações adicionais, e que se chegue a estabelecer efetivamente a possibilidade de um mundo com as características que Ramsey lhe atribui. Seria correto, nesse caso, afirmar que o Axioma da Redutibilidade é demonstravelmente falso nesse mundo? O que temos de examinar, agora, é se as condições apresentadas no modelo de Ramsey são *suficientes* para excluir a possibilidade da função predicativa cuja existência é asseverada nesse axioma.

Lembremos que o resultado do argumento, tal como o apresentamos acima, consiste no estabelecimento de que nenhuma função predicativa obtida por agregação verifuncional de funções atômicas poderia capturar exatamente a mesma extensão capturada pela função não-predicativa (φ) ($\varphi_{atx} \equiv \varphi_{ata}$). Isso foi feito notando-se que qualquer função predicativa considerada deve ser construída a partir de um número finito de funções atômicas, e que os indivíduos que concordam com o indivíduo *a* quanto a essas funções atômicas deverão

necessariamente concordar com ele quanto à função predicativa construída a partir delas. Mas – prossegue o argumento – entre esses indivíduos estarão incluídos muitos que não concordam com *a* quanto a *todas* as funções atômicas; assim, a função predicativa considerada falha em capturar exatamente a extensão requerida. Contudo, mais uma vez, está implícita neste argumento uma certa pressuposição que é preciso, agora, examinar.

Notemos que a conclusão que o argumento permite estabelecer é, de fato, mais fraca do que a que seria necessária para provar a falsidade, nesse modelo, da proposição enunciada pelo Axioma da Redutibilidade. Pois tudo o que se demonstrou é que nenhuma função predicativa composta por meio de agregação verifuncional de funções atômicas pode ser coextensiva à função não-predicativa considerada. Assim, se Ramsey pretende ter estabelecido a falsidade do Axioma da Redutibilidade em seu modelo, ele deve estar supondo tacitamente que essas são *todas* as funções predicativas que podem estar à nossa disposição. Por trás disto está, mais uma vez, uma outra tese wittgensteiniana formulada no *Tractatus*, a saber, a tese de que todas as proposições elementares (no sentido dos *Principia*) são funções de verdade de proposições atômicas. Mas esta é uma tese que não faz parte do sistema original do *Principia*; ao contrário, seus autores mencionam explicitamente (p. 8) a possibilidade de proposições obtidas a partir de outras proposições por meio de operadores não-extensionais, como, por exemplo, “S acredita que *p*”, que não é uma função de verdade da proposição *p*. Se as proposições iniciais forem proposições atômicas, e o operador não contiver variáveis aparentes, a proposição obtida será, por definição, uma proposição elementar cujo valor de verdade não estará determinado pelo valor de verdade das proposições atômicas que são seus constituintes. Ou seja, se *f* é um operador não-extensional, do fato de que $\varphi_{at}a \equiv \varphi_{at}b$ não se segue necessariamente que $f(\varphi_{at}a) \equiv f(\varphi_{at}b)$. Isto abre a possibilidade de funções predicativas para as quais não se pode afirmar que os indivíduos que concordam quanto às funções atômicas que delas fazem parte concordarão necessariamente quanto às funções predicativas em questão. Esta possibilidade invalida, portanto, um passo crucial implícito no argumento de Ramsey, pois não se pode mais concluir legitimamente, do fato de que certos indivíduos concordam com o indivíduo *a* em relação a uma certa seleção finita de funções atômicas, que eles obrigatoriamente concordarão com *a* em relação a *qualquer* função predicativa $\psi!x$ construída a partir dessas funções atômicas. Isso só ocorrerá se $\psi!x$ for um composto verifuncional daquelas funções atômicas, mas não temos que nos restringir a essa hipótese. Por tudo que Ramsey nos diz, poderia perfeitamente haver alguma função predicativa da forma, por exemplo, “S quer saber se $F!x$ ”, capaz de capturar exatamente a extensão de qualquer função não-predicativa que viéssemos, arbitrariamente, a selecionar. O que mostra

claramente que, ainda que se admita que as condições que Ramsey estipula para seu modelo sejam consistentes, elas não são capazes de fornecer um contra-exemplo efetivo à tese do Axioma da Redutibilidade.

É verdade que Russell terminou por incorporar a seu sistema, na 2ª edição dos *Principia*, a tese de que todas as funções de funções são extensionais; e, em particular, que todas as proposições da forma $f(p)$ são funções de verdade de p . Nesse novo contexto, o argumento de Ramsey seria, talvez, conclusivo, mas obviamente inútil, já que o novo sistema não mais contém o Axioma da Redutibilidade entre suas proposições lógicas primitivas.

3 O ARGUMENTO DE WITTGENSTEIN

Wittgenstein formulou sua crítica ao Axioma da Redutibilidade em uma carta dirigida a Russell, escrita em novembro ou dezembro de 1913. A referência ao axioma surge no contexto de uma crítica a diversas proposições admitidas como proposições primitivas no sistema dos *Principia Mathematica*, cuja verdade, se efetivamente fossem verdadeiras, seria, para Wittgenstein, meramente o resultado de um “acaso feliz”, e não a espécie de verdade incondicional que se exige das proposições da Lógica. Após insistir no caráter empírico (isto é, não-lógico) de proposições que afirmam a existência de ao menos um indivíduo ou de uma infinidade deles, Wittgenstein diz que o Axioma da Redutibilidade tem exatamente esse mesmo caráter, e passa a esboçar um argumento em favor de sua afirmação. Em virtude da natureza notoriamente obscura¹² desse argumento, é conveniente que o examinemos em sua formulação original:

Nun aber zu Deinem Reductions-Axiom: Stell' Dir vor, wir leben in einer Welt worin es nichts als Dinge gäbe, und ausserdem nur noch eine Relation, welche zwischen unendlich vielen dieser Dinge bestehe und zwar so, dass sie nicht zwischen jeden jedem Ding und jedem anderen besteht, und dass sie ferner auch nie zwischen einer endlichen Anzahl von Dingen besteht. Es ist klar, dass das *axiom of reducibility* in einer solchen Welt sicher nicht bestünde. Es ist mir aber

¹² A única tentativa de interpretação de que tenho conhecimento está em BLACK M. *A Companion to Wittgenstein's 'Tractatus'*, Cambridge: Cambridge University, 1971, p. 326. Black admite não saber exatamente o que Wittgenstein tinha em mente, e passa expor um contra-exemplo ao Axioma da Redutibilidade que lhe teria sido “sugerido” pelas observações de Wittgenstein. Deixando de lado o fato de que o contra-exemplo de Black é ineficaz, é difícil ver como essa sugestão poderia ter operado, pois o modelo que ele constrói não apresenta a mínima semelhança com o modelo descrito por Wittgenstein, e não pode, em nenhum sentido, ser tomado como uma explicação ou interpretação do argumento de que vamos tratar nesta seção.

auch klar, dass es nicht die Sache der Logik ist darüber zu entscheiden. ob die Welt worin wir leben nun wirklich so ist, oder nicht.¹³

Podemos reconhecer, aqui, os traços principais dos argumentos que seriam depois formulados por Waismann e Ramsey, Trata-se de definir certas condições relativas a uma possível configuração do mundo que, se satisfeitas, tornariam falsa a tese enunciada pelo Axioma da Redutibilidade. Como essas condições envolvem um elemento de contingência, e como não cabe à Lógica decidir se, de fato, o mundo está configurado desta ou daquela maneira, o axioma não pode ser admitido como uma proposição da Lógica. Mas o argumento de Wittgenstein difere em certos aspectos importantes das versões que foram posteriormente oferecidas pelos autores que já estudamos, e a apreensão desses aspectos exige um exame pormenorizado das condições que ele introduz e do alcance de sua conclusão.

Começemos por identificar separadamente as suposições envolvidas no exemplo proposto por Wittgenstein. Os elementos do mundo são apenas “coisas” (*Dinge*) e, além delas, *uma única relação*, que vigora entre um número infinito dessas coisas. Se supusermos que essas coisas podem ser identificadas aos indivíduos de que se tratou nos exemplos anteriores, veremos que o modelo de Wittgenstein incorpora a condição, já familiar, que postula a existência de um número infinito de indivíduos.

Consideremos agora a natureza dessa relação única (chamemo-la a relação *R*) contida no modelo. É óbvio que o que está em jogo aqui é o que Russell e Whitehead denominam uma *relação em intensão*¹⁴, e que Wittgenstein, nas suas “Notes on Logic”¹⁵, explica como *indefinível* que é atribuído aos indivíduos que ela relaciona (p.98). Em uma proposição como “*aRb*”, o símbolo “*R*” não funciona da mesma maneira que os símbolos “*a*” e “*b*”, visto que não é o nome de uma coisa (p. 99), mas é o fato de que “*R*” ocorre entre “*a*” e “*b*” que simboliza que as coisas designadas por estes dois últimos símbolos estão na relação *R*. É claro que, a partir dessa relação primitiva do modelo de Wittgenstein, muitas outras relações podem ser definidas; por exemplo, a relação que vigora entre *z* e *y* sempre que *x* está em *R* com *a* e *y* não está em *R* com *b*. Podemos,

¹³ Em WITTGENSTEIN, L. *Notebooks 1914-1916*. Oxford: Basil Blackwell, 1969. Apêndice 3, p. 126.

¹⁴ Ver *Principia*, p. xv. Relações em intensão não figuram explicitamente no sistema lógico-matemático desenvolvido nos *Principia*, sendo todas as relações tomadas ali (do mesmo modo que classes) à maneira extensional (p. 26). Para uma exposição das idéias de Russell sobre relações em intensão à época da redação dos *Principia*, ver *My Philosophical Development*, cap. 8.

¹⁵ Em *Notebooks 1914-1916*, Apêndice 1, p. 93-106. As “Notes on Logic” foram completadas poucos meses antes da formulação do argumento que estamos examinando, e constituem um texto ao qual é plausível referir-se em busca de esclarecimentos sobre esse argumento.

se quisermos, introduzir um novo símbolo para expressar a vigência desta última relação, pela definição $xSy := (xRa \ \& \ \sim yRb)$. Aqui, mais uma vez, “*S*” não é um nome, e a compreensão de sua significação pressupõe o conhecimento de sua definição e do significado de “*R*” : Quanto a este último símbolo, no entanto, ele não é passível de nenhuma definição semelhante, e daí provém a caracterização de seu significado como “indefinível”, isto é, como algo que deve ser compreendido por si mesmo e é incapaz de ser analisado em termos de outras significações mais primitivas.

A admissão de uma única relação indefinível tem como conseqüência que todas as proposições atômicas do modelo proposto por Wittgenstein são da forma (digamos) xRy . Essa restrição não impede, porém, a existência de infinitas funções predicativas de um ou mais indivíduos, cujos valores serão as proposições elementares formadas pela agregação das proposições atômicas disponíveis no modelo. Assim, o modelo de Wittgenstein permite, do mesmo modo que nos exemplos de Waismann e Ramsey, a introdução de uma variável $\phi!x$ para funções predicativas de indivíduos, e a conseqüente obtenção, por meio de generalização, das funções não-predicativas necessárias para a formulação do Axioma da Redutibilidade.

Passemos, agora, à condição que exige que *R* vigore entre infinitos indivíduos (“zwischen unendlich vielen dieser Dinge besteh[t]”). A formulação de Wittgenstein não é clara, e poder-se-ia supor que ele está pensando, aqui, em uma relação infinitária, isto é, uma relação que admite infinitos indivíduos como seus termos. Mas podemos descartar essa leitura por duas razões. Em primeiro lugar porque as proposições atômicas deveriam, nesse caso, ser expressões de comprimento infinito; e, seja qual for a opinião que Wittgenstein pudesse ter a esse respeito¹⁶, tal suposição é incompatível com os princípios básicos do sistema desenvolvido por Russell e Whitehead, e não poderia ser legitimamente adotada em uma crítica que se pretenda coerente com os pressupostos desse sistema. Em segundo lugar, e isto é o mais importante, porque todas as possíveis refutações do Axioma da Redutibilidade fazem uso justamente do caráter finito das expressões funcionais admissíveis, para demonstrar que não é possível a existência de uma função predicativa equivalente a uma dada função não-predicativa, e ficariam inviabilizadas se se admitisse a possibilidade de funções dadas por meio de expressões infinitas.

¹⁶ Ver *Tractatus*, 4.2211, onde ele parece admitir a possibilidade de que haja fatos atômicos compostos de infinitos objetos em combinação, o que levaria admissão de proposições atômicas contendo infinitos constituintes.

Vou supor, assim, que Wittgenstein tem em mente uma relação binária e interpretar o requisito de que R vigore entre infinitos indivíduos como significando que R vigora entre infinitos pares de indivíduos; ou melhor, que há infinitos indivíduos x e y para os quais xRy é verdadeira (com esta última formulação evita-se a menção a pares – isto é, classes – de indivíduos, que não constituem genuínas entidades no sistema dos *Principia*). Não é, porém, essencial para a compreensão do argumento de Wittgenstein que R seja uma relação binária, e eu adoto essa suposição meramente para simplificar a discussão. Isto parece, entretanto, ser corroborado pela cláusula seguinte do exemplo, na qual Wittgenstein exige que R não vigore entre cada coisa e cada uma das outras (“nicht zwischen jedem Ding und jedem anderen besteht”), o que sugere, afinal, que ele tem em mente uma relação que vigora entre duas coisas, uma relação binária. Não vou insistir neste ponto, mas simplesmente notar que esta última condição também comporta uma ambigüidade. Ela pode ser interpretada como exigindo que, para cada indivíduo, haja outros indivíduos que não estão na relação R com o primeiro – isto é, como significando $(x)(\exists y)(\sim xRy)$ – ou então, simplesmente, que haja indivíduos que não estão na relação R – isto é, $\sim(x, y)(xRy)$. Parece-me mais razoável adotar a primeira leitura, mas isto não será essencial para o prosseguimento desta discussão.

Resta, por fim, examinar a última cláusula apresentada por Wittgenstein, a qual exige que R jamais vigore entre um número finito de indivíduos. Tal como está formulada, ela parece exigir o mesmo que já se exigiu numa condição anterior, a saber, que R vigore entre infinitos indivíduos. É difícil decidir se Wittgenstein pretende apenas especificar melhor algo que já foi dito (daí o “und zwar so”, embora, em contrapartida, o “und . . . ferner auch . . .”), ou se se trata de um lapso de redação, e o que ele pretendia exigir é que haja, também, infinitos indivíduos entre os quais R não vigora (“nie zwischen einer endlichen Anzahl von Dingen [nicht] besteht”). Veremos à frente por que esta exigência poderia ser plausível, mas minha opção é simplesmente deixar de lado esta última cláusula, pois o material de que dispomos já permite caracterizar, de forma suficientemente precisa para os propósitos desta discussão, os traços essenciais do mundo que Wittgenstein submeteu à consideração de Russell. Trata-se de um mundo que obedece às seguintes especificações:

- (1) Há nele um número infinito de indivíduos.
- (2) Há uma única relação em intensão primitiva R .
- (3) R vigora entre infinitos indivíduos x e y .
- (4) R não vigora entre cada indivíduo e cada um dos outros.

Podemos passar, agora, à representação esquemática destas condições, fazendo uso, mais uma vez de uma tabela semelhante às utilizadas nos exemplos anteriores. Do mesmo modo que no caso do modelo de Ramsey, vamos considerar, aqui, as funções *atômicas* de indivíduos. Pelo requisito (3), *R* vigora entre infinitos indivíduos; há, assim, infinitas proposições atômicas verdadeiras nesse modelo, conseqüentemente, há infinitas proposições atômicas *tout court*. Essas proposições dão origem, portanto, a infinitas funções atômicas de indivíduos, que são as funções $xRa, xRb, \dots, aRx, bRx$, etc., e podemos introduzir a variável $\varphi_{at}z$ para percorrer essas funções.

Tendo à nossa disposição a totalidade dos indivíduos e a totalidade das funções atômicas de indivíduos, já temos os elementos necessários para a confecção da tabela. Poderíamos proceder como nas seções anteriores e dedicar as linhas aos indivíduos e as colunas às funções de indivíduos, mas isto trará um problema ao qual já nos referimos brevemente na seção anterior, e que decorre do fato de que, quando certos indivíduos satisfazem ou não certas funções, isto pode ter implicações quanto à satisfação ou não-satisfação de outras funções por outros indivíduos. Isto é particularmente relevante neste modelo, devido ao caráter fundamentalmente relacional de *todas* as funções atômicas nele envolvidas. Como exemplos, note-se que, se *a* satisfaz a função xRa , então *a* terá também necessariamente que satisfazer aRx , e se *b* não satisfaz cRx , então *c* não poderá satisfazer xRb , e assim por diante.

Devido, porém, ao caráter peculiar do modelo em consideração, essas relações de interdependência entre suas funções atômicas podem ser neutralizadas pelo recurso a uma diferente convenção para associar indivíduos e funções às linhas e colunas da tabela. Façamos corresponder a cada linha um indivíduo *y* determinado e a função atômica yRx ; similarmente, a cada coluna corresponderá um indivíduo determinado *x* e a função xRz . Com isso, consegue-se associar cada proposição atômica yRz a uma *única* posição da tabela, embora essa proposição possa ser analisada de dois modos; como o valor da função correspondente à coluna para o argumento correspondente à linha, ou vice-versa.

	<i>a</i> $\hat{x}Ra$	<i>b</i> $\hat{x}Rb$	<i>c</i> ... $\hat{x}Rc$...
<i>a</i> ; $aR\hat{x}$	V		
<i>b</i> ; $bR\hat{x}$			
<i>c</i> ; $cR\hat{x}$		F	
⋮			
⋮			
⋮			

É fácil ver que este procedimento resolve o problema levantado pelas relações de interdependência existentes entre as funções atômicas do modelo e restabelece, pelo menos sob este aspecto, a total liberdade quanto ao preenchimento das posições da tabela, já que, por exemplo, a indicação de que a função xRa é satisfeita pelo indivíduo a , efetuada pela colocação do sinal “V” (para “verdadeira”) na posição correspondente à proposição atômica aRa , fornece automaticamente a indicação de que a função aRx é satisfeita por a ; e o mesmo ocorre nos casos em que a não-satisfação de uma certa função por um certo indivíduo é indicada pela colocação do sinal “F” (para “falsa”) na posição correspondente à proposição atômica em questão. Com isso, podemos estar certos de que, seja qual for a distribuição dos sinais “V” e “F” pela tabela, não se estará incorrendo em inconsistências decorrentes do caráter relacional das funções atômicas envolvidas no modelo.

Contudo, para poder garantir a plena consistência de todas as distribuições, é preciso levar em conta, ainda, a possibilidade, examinada em conexão com o exemplo de Ramsey, de funções atômicas incompatíveis entre si, como por exemplo “ z é vermelho” e “ z é verde”, nas quais os predicados envolvidos são simples, isto é, indefiníveis, e a incompatibilidade não se manifesta, portanto, explicitamente como uma incompatibilidade lógica. Mas esta possibilidade está excluída no modelo apresentado por Wittgenstein, dado que R é o *único* predicado simples envolvido na construção das funções e proposições atômicas do sistema. É esta característica peculiar do modelo de Wittgenstein que lhe permite enfrentar com sucesso uma objeção que traz dificuldades para o contra-exemplo de Ramsey, e lhe garante uma base segura para estabelecer a consistência das condições impostas ao mundo por ele especificado.

É tempo, então, de considerar essas condições e analisar as conseqüências que elas trazem para a tese do Axioma da Redutibilidade. Wittgenstein não menciona nenhuma função não-predicativa em particular que pudesse servir de teste para a validade do axioma, mas podemos adotar, mais uma vez, a função considerada nos exemplos anteriores, isto é, $(\varphi)(\varphi!x \equiv \varphi!a)$. Segundo o Axioma da Redutibilidade, deve existir uma função predicativa cuja extensão abrange exatamente os indivíduos que satisfazem a função acima, a saber, os indivíduos que concordam com o indivíduo a em relação a todas as funções predicativas. Já notamos anteriormente que o teste do Axioma da Redutibilidade pode ser encaminhado em termos de funções atômicas, buscando-se encontrar uma função predicativa $\psi!x$ que seja extensionalmente equivalente à função não-predicativa $(\varphi)(\varphi_{at}!x \equiv \varphi_{at}!a)$, que é satisfeita por todos os indivíduos que concordam com a em relação a todas as funções atômicas do modelo. Examinemos, então, em que medida as

condições estipuladas no modelo de Wittgenstein permitem assegurar que não há uma função $\psi!x$ com essa característica.

Com auxílio de nossa representação esquemática, pode-se afirmar que os indivíduos que concordam com a em todas as funções atômicas serão aqueles cujas linhas e colunas correspondentes são idênticas (quanto à distribuição dos “V”s e “F”s) respectivamente à linha e coluna que correspondem ao indivíduo a . O problema consiste, então, em determinar, para uma dada configuração arbitrária do mundo representada na tabela, uma função predicativa $\psi!x$ capaz de subsumir exatamente esses indivíduos. Vamos examinar, inicialmente, certos casos particulares.

Se a tabela fosse completamente homogênea, isto é, se todas as posições estivessem preenchidas apenas com o sinal “V” ou apenas com o sinal “F”, o problema seria facilmente resolvido. Nesse caso, *todos* os indivíduos seriam concordantes com a , e $\psi!x$ poderia ser dada por qualquer função predicativa analítica da forma $\varphi_{at!x} \vee \sim\varphi_{at!x}$. Mas o requisito (4) exclui a primeira situação, e o requisito (3) exclui a segunda. Assim, estas configurações estão descartadas.

Outra situação em que se poderia determinar uma função predicativa com a extensão desejada é aquela em que a tabela apresenta apenas um número finito de sinais “V”, ou um número finito de sinais “F”. Nesse caso, seria possível isolar uma porção retangular finita da tabela, na qual todos os sinais de uma certa espécie estariam incluídos, e essa porção determinaria, *ipso facto*, todas as funções atômicas com relação às quais poderia haver indivíduos que discordam de a . Como o número dessas funções será finito, poderíamos construir a função $\psi!x$ desejada fazendo a conjunção de todas as funções atômicas satisfeitas por a e de todas as negações das funções atômicas que a não satisfaz. Mais uma vez, porém, as condições estipuladas por Wittgenstein impedem a vigência desta situação favorável ao Axioma da Redutibilidade. Pelo requisito (3), estão excluídas as configurações em que só há um número finito de “V”s na tabela. E, pelo requisito (4), na interpretação que propusemos, exclui-se a presença de um número finito de “F”s. É verdade que, segundo a outra interpretação admissível de (4), uma configuração como essa não teria sido excluída. Resta, então, a hipótese já mencionada de que a última cláusula do exemplo de Wittgenstein envolva realmente um lapso, e que ele estivesse de fato pretendendo proscrever ali esta última possibilidade.

Seja como for, a questão não tem maior importância, pois Wittgenstein não está buscando excluir sistematicamente, através de suas condições, *todas* as situações em que o Axioma da

Redutibilidade poderia estar satisfeito. Neste aspecto, seu procedimento é distinto dos de Waismann e Ramsey, ao não pretender exibir uma *prova* de que o axioma é falso em certas circunstâncias especificadas. Isso é perceptível nos próprios termos em que ele formula sua conclusão: “Es ist *klar*, dass das axiom of reducibility in einer solchen Welt *sicher nicht bestünde*” (meus grifos). Afirmar que o Axioma da Redutibilidade com certeza não vigoraria num mundo como esse é uma forma de expressão pouco adequada para verdades demonstradas: nesses casos o usual é a simples afirmação categórica e não modalizada¹⁷. O efeito do argumento de Wittgenstein é reverter do ônus da prova: ao invés de exibir uma configuração que falsifica o axioma, ele desafia seus defensores a demonstrar sua validade nas configurações “interessantes”, isto é, naquelas que distintas das configurações particulares acima descritas que eram favoráveis ao Axioma da Redutibilidade. As especificações de Wittgenstein visam simplesmente trazer o problema para o terreno mais geral, que é onde ele deve ser discutido.

É fácil, agora, ver a razão pela qual o desafio lançado pelo argumento de Wittgenstein não pode ser respondido. Uma certa função predicativa $\psi!x$ obtida pela conjunção de um número finito de funções atômicas ou de negações dessas funções terá, sem dúvida, sucesso em excluir todos os indivíduos que não concordam com o indivíduo a quanto a essas funções atômicas. Mas, dado que se estabeleceu que todas as distribuições de “V”s e “F”s são consistentes, sempre estará aberta a possibilidade de que um indivíduo que satisfaz $\psi!x$ venha a discordar de a quanto a qualquer uma das infinitas funções atômicas não envolvidas na construção de $\psi!x$. Note-se que é apenas no modelo de Wittgenstein que o argumento para o caráter contingente do Axioma da Redutibilidade pode ser realmente conclusivo, pois é somente após a abolição de todas as conexões intensionais ou semânticas entre as funções atômicas, pela admissão de um único predicado primitivo R , que estamos plenamente autorizados a afirmar que as funções contidas em $\psi!x$ não trazem consigo implicações internas quanto à satisfação ou não-satisfação de outras funções atômicas¹⁸, e que, se porventura existir uma função predicativa equivalente a

¹⁷ Não se diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo “seria com certeza” 180 graus na geometria euclidiana.

¹⁸ É preciso ressaltar – como me foi observado pelo Prot. Michel Ghins – que se está pressupondo, aqui, que a relação R não exhibe intensionalmente nenhuma das propriedades familiares de reflexividade, irreflexividade, simetria, assimetria, transitividade, etc., as quais trariam restrições aos possíveis modos de preencher a tabela. É claro, porém, que a simetria da relação R não prejudicaria o argumento aqui apresentado, bastando apenas que noa limitássemos, na discussão, à porção da tabela situada acima de sua diagonal. Com efeito, na próxima seção, vou considerar uma interpretação da relação R que a torna inerentemente polissimétrica – a saber, a relação de diversos indivíduos estando combinados em um fato atômico.

$(\varphi)(\varphi_{at}x \equiv \varphi_{at}a)$, isso só pode ter sido o resultado de um feliz e improvável acaso, e não de alguma determinação necessária proveniente da natureza dos predicados simples envolvidos em $\psi!x$.

Resta por fim examinar uma objeção que foi fatal contra o argumento de Ramsey, e que diz respeito à possibilidade de funções predicativas de indivíduos construídas por meio de operadores proposicionais não-extensionais. A objeção, como se lembrará, é que, ao levar em conta exclusivamente funções predicativas obtidas pela agregação verifuncional de funções atômicas, o argumento de Ramsey não havia sido suficiente para excluir a possibilidade de que exista, apesar de tudo, uma função predicativa da forma, por exemplo, “ S acredita que F_1x ”, que é satisfeita pelos mesmos indivíduos que satisfazem qualquer função não-predicativa selecionada. Embora o argumento de Wittgenstein não se proponha, segundo eu o interpreto, a exhibir uma situação concreta em que o Axioma da Redutibilidade seja demonstravelmente falso, mas apenas indicar sua implausibilidade quando certas configurações favoráveis estão descartadas, deve-se notar que sua eficácia depende igualmente da suposição de que todas as funções predicativas porventura consideradas são compostos verifuncionais de funções atômicas, e é preciso investigar se o seu modelo pode, ao contrário do de Ramsey, tornar legítima essa suposição.

Considere-se, então, o que está envolvido na admissão de funções predicativas obtidas a partir de funções atômicas por meio de operadores não-extensionais, e tome-se, por simplicidade, uma função da forma $f(xRa)$, na qual f constitui um operador dessa espécie. Em virtude da natureza mesma desse operador, os valores de verdade das proposições elementares que são valores dessa função predicativa não estarão determinados pelos valores de verdade das proposições atômicas que são valores da função atômica xRa ; vale dizer, não estarão determinados pela extensão dessa função. Assim, ainda que xRb , digamos, seja coextensional a xRa , $f(xRb)$ não terá necessariamente a mesma extensão de $f(xRa)$. Isto significa que f envolve um certo predicado que se aplica às funções $\varphi_{at}x$ *enquanto tais*, independentemente de quais sejam as extensões dessas funções, e constitui, portanto, um predicado *intensional* de funções. Pode-se ver, agora, como a parcimônia ontológica do mundo imaginado por Wittgenstein permite evitar uma objeção que foi decisiva contra o modelo que Ramsey propôs. Pois, ao admitir uma única relação em intensão primitiva R , com domínio de aplicação restrito a indivíduos, Wittgenstein exclui de antemão a possibilidade de funções não-extensionais de funções, e, conseqüentemente, de operadores proposicionais distintos dos operadores lógicos familiares de negação, conjunção, disjunção, etc. Seu argumento preserva, portanto, toda sua eficácia, pois não há, em seu modelo, a

possibilidade de *outras* funções predicativas além daquelas obtidas por agregação verifuncional de funções atômicas.

4 O AXIOMA DA REDUTIBILIDADE E O MUNDO DO *TRACTATUS*

Examinamos neste trabalho três argumentos destinados a estabelecer o caráter contingente da proposição enunciada pelo Axioma da Redutibilidade. Os argumentos de Waismann e Ramsey propunham se a oferecer uma prova conclusiva da natureza não-lógica dessa proposição, por meio da especificação de um mundo possível no qual ela seria demonstravelmente falsa. Vimos que ambas essas tentativas fracassam: no caso de Ramsey, porque as condições que ele introduz na formulação de seu contra-exemplo não são suficientes para implicar a falsidade do axioma; no caso de Waismann, porque, embora suas condições sejam suficientes para tal, não se conseguiu demonstrar que elas podem ser consistentemente satisfeitas. Assim, curiosamente, é o argumento de Wittgenstein – que antecede os dois outros em mais de uma década – que surge como o mais bem-sucedido dos três, ao introduzir condições que são efetivamente consistentes e capazes de excluir a existência de funções predicativas obtidas por meio de operadores não-extensionais, às quais o defensor do axioma poderia recorrer, *ex machina*, para recusar a validade de provas como a que Ramsey ofereceu.

Poder-se-ia objetar, entretanto, que o sucesso do argumento de Wittgenstein é obtido a um custo muito elevado, já que a postulação de um mundo em que vigora uma única relação primitiva parece ser, à primeira vista, muito mais implausível que a própria tese do Axioma da Redutibilidade que com ela se pretende refutar. Mas é preciso distinguir cuidadosamente os aspectos lógicos e os aspectos ontológicos envolvidos na discussão. Do ponto de vista lógico, a restrição introduzida no modelo de Wittgenstein tem como consequência direta a determinação de uma única estrutura particular característica de todas as proposições atômicas do modelo, que é a forma xRy . No entanto, como já observamos, o sistema lógico dos *Principia Mathematica* foi desenvolvido independentemente de qualquer teoria definida acerca da estrutura das proposições atômicas; assim, não se pode dizer que o modelo proposto por Wittgenstein envolva qualquer violação dos princípios lógicos explicitamente assumidos na construção desse sistema. Uma segunda consequência da admissão de uma única relação em intensão primitiva de âmbito restrito a indivíduos, é que, no modelo de Wittgenstein, todas as funções de funções são extensionais, e, como resultado, todas as proposições elementares do modelo são funções de verdade de proposições atômicas. Mais uma vez, contudo, trata-se de uma restrição que não é conflitante com a lógica dos *Principia*, pois, embora Russell e Whitehead tenham admitido a possibilidade

de agregados não-extensionais de proposições, o desenvolvimento da teoria não exige que haja tais agregados¹⁹. Segue-se que, segundo considerações estritamente lógicas, não há nenhuma razão para se supor que o mundo especificado por Wittgenstein esteja em desacordo com os pressupostos constitutivos do sistema dos *Principia*.

Seria possível, por outro lado, argumentar que o modelo proposto por Wittgenstein não é conciliável com as suposições ontológicas mínimas que estão na base do sistema exposto por Russell e Whitehead. De fato, na única passagem em que a ontologia subjacente aos *Principia* é explicitamente discutida (p. 43–4), seus autores representam o universo como constituído de objetos que apresentam várias qualidades e mantêm entre si várias relações e, com isso, parecem estar requerendo uma diversidade ontológica mais rica que a estipulada no universo do modelo de Wittgenstein (*várias* qualidades e *várias* relações, em contraste com a relação única admitida no modelo wittgensteiniano). Cabe notar, porém, que essa digressão ontológica situa-se exatamente na Introdução dos *Principia*, a qual tem propósitos meramente elucidativos, e não reaparece nos capítulos que fazem parte do corpo propriamente dito do texto, nos quais a exposição do sistema se realiza de maneira rigorosa e metódica. Mais especificamente, aquela digressão surgiu apenas para introduzir, informalmente, a distinção entre julgamentos elementares e julgamentos gerais, e a ambigüidade das noções de verdade e falsidade tais como aplicadas a cada uma dessas espécies de julgamentos. Para esses propósitos, é irrelevante que a ontologia seja mais ou menos rica, e o modelo de mundo de Wittgenstein, com sua única relação, já seria suficiente para introduzir uma tal distinção. Ao mencionarem várias qualidades e várias relações, Russell e Whitehead estavam simplesmente lançando mão da concepção que lhes parecia ser a mais comumente aceita, e a menos apta a suscitar controvérsias desnecessárias. É conveniente repetir que *nada*, nos *Principia*, depende de uma doutrina específica acerca da natureza e diversidade dos elementos últimos que compõem o universo, mesmo porque, como já se observou, Russell não tinha, na ocasião, uma teoria definida sobre esses tópicos, e continuaria ainda por muitos anos a experimentar e rejeitar diversas alternativas em suas obras propriamente filosóficas e metafísicas.

É perfeitamente legítimo, portanto, fazer uso de um modelo como o proposto por Wittgenstein para testar a validade das proposições primitivas adotadas nos *Principia Mathematica*, e, em particular, do Axioma da Redutibilidade. Mas seria esse modelo, considerado

¹⁹ E, de fato, em várias demonstrações eles se esquecem de levar em conta essa possibilidade, como no caso do teorema *14.15 $\vdash (\exists x)(\phi x) = b \supset \psi\{(\exists x)(\phi x)\} \equiv \psi b$, que não vale no célebre caso em que se toma 'b' como 'Scott', ' ϕx ' como 'x é o autor de Waverley' e ' ψx ' como 'George IV quis saber se Scott é x'.

em si mesmo, filosoficamente plausível? Será realmente possível conceber um mundo constituído – para empregar os termos metafísicos tradicionais – apenas por particulares e um único universal? Esta questão nos leva diretamente ao tópico com o qual pretendo concluir este trabalho

Começemos por observar que não é de modo algum claro que Wittgenstein estivesse de fato especificando um mundo no qual só haveria particulares e um único universal. É muito difícil determinar o que Wittgenstein entendia, nesse estágio de seu desenvolvimento filosófico, pelos termos “Ding” e “Relation” empregados na formulação de seu modelo; mas, se nos referirmos mais uma vez às “Notes on Logic”, parece claro que a relação R não se opõe às “coisas” de seu modelo da maneira pela qual se concebe tradicionalmente a oposição entre universais e particulares. De fato, ao analisar uma proposição atômica como “ aRb ” ele a decompõe nos nomes “ a ” e “ b ” e em uma *forma*, que é expressa com o auxílio do símbolo “ R ”, mas da qual “ R ” não é um nome (p. 99). Ele enfatiza que não há nenhuma coisa que seja a forma da proposição, e nenhum nome que seja o nome de uma forma (p. 99). Assim como é errôneo supor que “ aRb ” compõe-se de três nomes, é errôneo supor que o fato atômico que lhe corresponde componha-se de três entidades, das quais uma seria uma relação (um universal). Seja qual for a maneira pela qual Wittgenstein entendia a natureza dessa relação R , parece óbvio que ele não a toma como um constituinte de um fato no mesmo sentido em que a e b são constituintes, e que se distinguiria destes últimos meramente por ser uma entidade pertencente a uma diferente categoria ontológica.

Assim, a aparente implausibilidade do modelo de Wittgenstein resulta, na verdade, da tentativa de traduzi-lo em termos de categorias ontológicas que não estavam envolvidas em sua formulação. Aqueles que, devido a suas particulares predileções metafísicas, consideram impensável um mundo despovoado de universais (*qua* constituintes do mundo capazes de serem nomeados nas proposições) poderiam talvez satisfazer-se incluindo-os entre as infinitas “Dinge” postuladas no modelo²⁰, embora o mais aconselhável seria abster-se de pensar em termos dessas categorias ao examinar a natureza e o alcance do contra-exemplo de Wittgenstein ao Axioma da Redutibilidade. De fato, tudo o que se necessitou em nossa discussão desse contra-exemplo foi a possibilidade de analisar as proposições atômicas e elementares do modelo em termos de *função* e *argumento* e, para isso, não se exigiu nenhuma determinação do estatuto categorial dos significados dos símbolos que ocorrem nessas proposições.

²⁰ Cf. *Notebooks 1914-1916*, p. 60: “Auch Relationen und Eigenschaften etc. sind Gegenstände” (16/6/1915).

À época em que Wittgenstein formulou o argumento que viemos discutindo, suas concepções estavam experimentando uma tumultuada evolução em direção à forma final que adquiriram no *Tractatus Logico-Philosophicus*, e é notável observar que, nessa obra, Wittgenstein terminou por adotar, como características essenciais de qualquer mundo possível, importantes elementos do modelo que ele havia proposto, cinco anos antes, como um contra-exemplo à tese do Axioma da Redutibilidade. Assim, Wittgenstein afirma, no *Tractatus*, que todos os mundos possíveis compartilham da mesma *substância*, isto é, do mesmo domínio de elementos simples que são, todos eles, denominados objetos (*Gegenstände*), ou “coisas” (*Dinge*). Há, além disso, uma *única* relação primitiva que pode vigorar entre esses objetos, que é a relação de *estarem combinados* em um fato atômico (*Sachverhalt*). O fato de que essa relação vigore efetivamente entre certos objetos e não vigore entre outros – isto é, que certos objetos estejam combinados em fatos atômicos e outros não estejam assim combinados – é um dado contingente do mundo tal como ele está realmente configurado; e é possível conceber que essa relação de combinação se distribuísse diferentemente ao largo do domínio de objetos (e é essa possibilidade de diferentes combinações que dá um sentido preciso à locução leibniziana “mundos possíveis”). O que é *essencial e invariável* no mundo é a sua substância, que são os objetos que participam de seus fatos. Os fatos do mundo, enquanto tais, são contingentes, mas é igualmente essencial que os objetos *possam* combinar-se em fatos, e, portanto, que haja uma tal relação de combinação capaz de vigorar ou não entre os objetos.

Voltando às especificações formuladas por Wittgenstein em seu modelo de 1913, e examinando-as em relação às doutrinas expostas no *Tractatus*, vemos que os itens (3) e (4) introduzem exigências quanto à maneira pela qual os objetos estão empiricamente combinados no modelo, e dizem respeito, portanto, a uma possibilidade que se supõe realizada para fins de argumentação. Os itens (1) e (2) mencionam, porém, certos elementos essenciais de qualquer mundo possível (a saber, os objetos que formam sua substância e a relação que lhes dá a possibilidade de se combinarem em fatos atômicos), e as exigências introduzidas por estes últimos itens não são, como no caso dos itens anteriores, exigências que se pudesse supor como estando contingentemente satisfeitas. Se elas estiverem de acordo com as características necessárias e imutáveis de todos os mundos possíveis, elas estarão necessariamente satisfeitas em qualquer circunstância; se estiverem em desacordo com aquelas características, não haverá nenhum mundo possível que possa satisfazê-las.

Tomando-se, portanto, os quatro requisitos que Wittgenstein estipula para a montagem de seu contra-exemplo ao Axioma da Redutibilidade, nota-se que, excetuando-se uma importante cláusula à qual voltaremos logo mais, eles definem efetivamente um mundo possível segundo a concepção do *Tractatus*. Isto significa que, ainda que o Axioma da Redutibilidade seja verdadeiro no mundo tal como esse mundo de fato é, será possível conceber um mundo em que ele é falso. Ou seja, o argumento desenvolvido por Wittgenstein em sua carta a Russell poderia ser exatamente reproduzido no quadro conceitual do *Tractatus* e alcançar o mesmo resultado, isto é, a demonstração de que o Axioma da Redutibilidade só poderia ser verdadeiro em virtude de um improvável acaso, sendo ilegítima, portanto, sua inclusão entre as proposições da Lógica, cuja verdade deriva de características necessárias do mundo, e não de fatores circunstanciais.

E, de fato, Wittgenstein afirma, na proposição 6.1233 do *Tractatus*, que se pode conceber um mundo em que o Axioma da Redutibilidade não vale. *Mas ele suprime o argumento formulado em 1913 como fundamento dessa afirmação*, e passa imediatamente à observação de que a Lógica não tem nada a ver com a questão de se nosso mundo é efetivamente um mundo como esse ou não. Qual seria a razão que teria levado Wittgenstein a reafirmar, no *Tractatus*, a sua convicção sobre o caráter contingente do axioma e, ao mesmo tempo, abster-se de reproduzir o argumento anteriormente apresentado a Russell?

Para responder a essa questão, é preciso retomar o importante requisito do modelo de 1913 que deixamos de lado ao considerarmos a transposição desse modelo para o quadro conceitual do *Tractatus*. Trata-se, como já se terá percebido, da cláusula que exige a existência de *infinitos* indivíduos no modelo. Já tivemos ocasião de indicar que essa cláusula é indispensável para a montagem de qualquer contra-exemplo efetivo à tese do Axioma da Redutibilidade, já que, sem ela, não se pode garantir a existência de infinitas funções predicativas com diferentes extensões, e é somente a presença de um número infinito de tais funções no modelo que nos impede de agregá-las em uma expressão funcional finita extensionalmente equivalente a uma dada função não-predicativa. Em outras palavras, em um modelo com um número finito de indivíduos, o Axioma da Redutibilidade será necessariamente verdadeiro. Portanto, qualquer argumento destinado a estabelecer o caráter contingente da proposição enunciada pelo axioma deve obrigatoriamente partir da suposição de que o mundo contém infinitos indivíduos.

Wittgenstein não experimentou, em 1913, nenhuma hesitação em introduzir uma condição como essa em seu modelo; e, de fato, em uma passagem da mesma carta em que ofereceu seu contra-exemplo a Russell, ele reafirmou sua convicção de que o chamado Axioma da Infinitude

(que é a proposição que assevera a existência de \aleph_0 coisas no universo) é uma proposição empírica, cuja verdade ou falsidade deve ser estabelecida não por meios lógicos, mas, em princípio, pela experiência (ainda que, de fato, a experiência, sendo finita, não consiga decidi-la). Mas na época em que suas idéias filosóficas chegaram a consolidar-se no sistema exposto no *Tractatus*, essa possibilidade não estava mais aberta para Wittgenstein, pois, segundo o *Tractatus*, a hipótese de que há infinitos objetos (e, de resto, também a hipótese de que há um número finito deles) não é uma proposição empírica, nem uma proposição da Lógica, mas um puro e absoluto nonsense (4.1272); e qualquer argumento envolvendo a formulação dessa hipótese será, em consequência, absurdo e incapaz de estabelecer qualquer conclusão.

Assim, Wittgenstein não pode, no *Tractatus*, mencionar a possibilidade de um mundo que contenha infinitos objetos, pois o mundo contém os objetos que contém, e, como esses objetos constituem a substância de todos os mundos possíveis, qualquer mundo capaz de ser concebido conterá exatamente esses mesmos objetos – nenhum a mais e nenhum a menos. Os objetos do mundo constituem o fundamento lógico e metafísico de toda possibilidade, já que constituem o limite da realidade empírica e do próprio pensamento (5.5561 e 5.6). O recurso ao argumento de 1913 está, portanto, absolutamente excluído, dado que ele pressupõe que podemos afirmar uma certa possibilidade com relação à constituição da substância do mundo e excluir outras possibilidades; e isto, para o Wittgenstein do *Tractatus*, requereria a absurda suposição de que a Lógica pudesse estender-se além dos limites do mundo, e observar esses limites, por assim dizer, “do lado de fora” (5.61).

Se as considerações precedentes são suficientes para explicar a razão pela qual o argumento formulado em 1913 foi excluído do *Tractatus*, elas levantam, por outro lado, um sério problema. Por que, afinal, Wittgenstein teria mantido sua afirmação de podemos conceber um mundo em que o Axioma da Redutibilidade não é verdadeiro? Pois certamente se poderia objetar que, embora a exposição do *Tractatus* não faça nenhuma referência ao número de objetos que constituem a substância do mundo, esse número deve ser, apesar disso, ou finito, ou infinito – *tertium non datur*. Devemos reconhecer, é claro, que não se trata, aqui, de genuínas possibilidades ligadas aos traços contingentes do mundo e capazes de serem expressas em proposições significativas; e que, se o número de objetos for um ou outro, ele será necessariamente esse, e não poderia ser diferente. Concederemos também que estamos aplicando o princípio de terceiro excluído a hipóteses que são nonsense, e que, desse modo, nossa própria afirmação de que os objetos são em número finito ou infinito é igualmente um nonsense; mas,

nesse sentido, ela não é pior nem melhor que muitas das afirmações contidas no *Tractatus*. E, de fato, Wittgenstein refere-se explicitamente a uma dessas “possibilidades” que estamos considerando, ao afirmar, em 4.2211, que o mundo possuiria uma substância – isto é, um domínio de elementos irreduzivelmente simples – ainda que ele fosse infinitamente complexo, isto é, ainda que houvesse fatos atômicos envolvendo um número infinito de objetos.²¹

Se admitirmos, porém, a “possibilidade” de uma substância finita, deveremos concluir que Wittgenstein não tem nenhuma razão para afirmar que se poderia sempre conceber um mundo em que o Axioma da Redutibilidade não vigora. Pois, como observamos, a finitude do número de objetos acarreta trivialmente a verdade do axioma; e, dado que nesse caso ele seria verdadeiro em todos os mundos possíveis, ele seria uma *tautologia* no sentido próprio do *Tractatus*. Portanto, se Wittgenstein estiver empregando, em 6.1233, a palavra “denken” no sentido específico que ela possui no *Tractatus* – isto é, para indicar o pensamento que se move dentro dos limites de possibilidade impostos pela substância do mundo – então será forçoso concluir que sua afirmação envolve implicitamente um compromisso com a tese de que essa substância é infinita. Pois é só sob essa suposição que se pode considerar como efetivamente estabelecido que *podemos* pensar um mundo no qual o Axioma da Redutibilidade é falso.

A manutenção, no *Tractatus*, da tese de que o Axioma da Redutibilidade constitui uma proposição contingente fornece alguma indicação para se supor que Wittgenstein, mesmo na ausência de um comprometimento explícito, considera o mundo como consistindo de combinações de um número infinito de objetos. Isto não entra em conflito com sua afirmação meramente hipotética da possível complexidade infinita do mundo mencionada em 4.2211, já que o que está ali em questão é a presença de infinitos objetos em uma única combinação, e a substância do mundo pode perfeitamente ser infinita sem que o mundo seja infinitamente complexo nesse sentido. Outra indicação na mesma direção é o fato de que Wittgenstein recua, no *Tractatus*, de sua posição de 1913 quanto ao caráter empírico da proposição enunciada pelo Axioma da Infinitude, tratando-a agora como uma pseudoproposição que pretende *dizer* algo que só poderia, propriamente, *mostrar-se* na linguagem, caso esta contivesse um número infinito de nomes com diferentes significações (5.535). O uso do subjuntivo revela, mais uma vez, a

²¹ Devo ao Prof. Michael Wrigley o ter-me chamado a atenção para essa passagem do *Tractatus*, na qual a “possibilidade” de uma substância infinita é explicitamente admitida. Em seu texto “Infinity in the *Tractatus*” (versão preliminar), Michael Wrigley defende convincentemente a tese de que Wittgenstein considerava à época perfeitamente coerente a hipótese de que poderia haver um número infinito de objetos, embora ela não fosse expressável em seu sistema.

relutância de Wittgenstein em comprometer-se com a afirmação de que a linguagem poderá, de fato, vir a mostrar tal coisa, o que está de acordo com sua relutância em afirmar explicitamente que a substância do mundo compõe-se de infinitos objetos. Mas as duas questões estão intimamente ligadas, e é curioso que Wittgenstein tenha, no caso do Axioma da Infinitude, remetido a decisão para aquela enigmática instância que ele denomina “a aplicação da Lógica”, e não tenha aguardado uma jurisprudência semelhante antes de pronunciar-se pelo caráter contingente do Axioma da Redutibilidade.²²

LISTA BIBLIOGRÁFICA

- 1 BLACK, M. *A Companion to Wittgenstein's 'Tractatus'*. Cambridge: Cambridge University, 1971.
- 2 HOCHBERG, H. Russell, Ramsey and Wittgenstein on Ramification and Quantification. *Erkenntnis*, v. 27, 1987.
- 3 RAMSEY, F. P. *Foundations. Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics*. Londres: Routledge & Kegan Paul, 1978.
- 4 RUSSELL, B. *My Philosophical Development*. Londres: Allen & Unwin, 1959.
- 5 RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica to *56*. Cambridge: Cambridge University, 1962.
- 6 WAISMANN, F. *Philosophical Papers*. Dordrecht: Reidel, 1977.
- 7 WITTGENSTEIN, L. *Notebooks 1914-1916*. Oxford: Basil Blackwell, 1969.
- 8 . _____. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Londres: Routledge & Kegan Paul, 1969.

²² Agradeço a Michel Ghins, José Alexandre Guerzoni, Michael Wrigley, Silvio Mota Pinto e Euphly Jalles Filho pelas sugestões, correções e comentários oferecidos durante a elaboração deste texto.