Akribeia: O Conceito de rigor matemático em *O Analista*

Alex Calazans
Mestre em filosofia - UFPR
alexcalazans@ufpr.br

I

É muito fácil encontrar profundas discussões entre os "grandes" comentadores de Berkeley sobre a sua posição contra o materialismo, ou seja, contra a "existência material" que independeria do que pode ser percebido. Não é de se esperar que isso realmente tenha acontecido, visto que Berkeley ocupa grande parte de sua obra filosófica para apresentar tal posição. Popper, como sendo um desse grandes comentadores, em *Três concepções acerca do conhecimento humano*, nos lembra que o ataque a filosofia natural de Newton acontece porque ela parecia ser um "serio rival à religião"[1]. Os "livre-pensadores", como Berkeley os denomina, teriam visto no trabalho newtoniano um exemplo de sucesso do "intelecto humano" em explicar o mundo independentemente da ajuda da revelação divina. Quanto a isso, algo que não pretendo aprofundar aqui, Berkeley argumenta que o trabalho de Newton não seria capaz de explicar as "causa últimas" da realidade, mas seria útil enquanto "hipótese matemática" para realizar boas previsões dos fenômenos. Desse modo, é daí que nasce a posição instrumentalista de Berkeley.

Por outro lado, Berkeley manifestou também um grande interesse desde sua juventude pelos escritos matemáticos. É em seu texto *O Analista* (1734) que ele apresenta de maneira mais intensa tal interesse pela matemática. No entanto, *O Analista* representa ser uma denuncia da falta de precisão, em especial, do método matemático de Newton até então denominado como *Método das fluxões*. Em última instância, esse texto d'*O Analista* também possui como alvo o "livre-pensador" que teria visto na matemática um suporte para atacar novamente a religião. Desse modo, o que nos interessa nesse trabalho a ser apresentado é saber como se articula n'*O Analista* aquilo que Berkeley diz faltar ao método newtoniano. Em outra palavras, se Berkeley aponta a ausência de "rigor" no método das fluxões, é necessário, para esclarecer a própria crítica de Berkeley, o que ele assumiria como elemento necessário para se obter rigor na matemática. Caso levemos em consideração o que afirma Douglas Jessph, um dos mais renomados comentadores da filosofia da matemática de Berkeley na atualidade, deveríamos encontrar n'*O Analista* um ataque ao método das fluxões que "não depende das peculiaridade da epistemologia e metafísica de Berkeley"[2]. Isso significa que seria possível localizar n'*O Analista* um padrão de rigor comum a vários autores de sua época e por sua vez que independeria de uma direta relação com o princípio berkeleyano mais famoso: o *esse*

1 (cf. Popper, 1980, p.128)
2 (cf. Jesseph, 2005, p.305)

est percipi (ser é ser percebido). Portanto, cabe reconstruir os principais argumentos da crítica de Berkeley para saber como devemos compreender a interpretação do professor Jesseph. Nesse sentido, o que será realizado aqui é uma espécie de "mapeamento" do conceito de rigor que está sendo utilizado nessa crítica de Berkeley à matemática de Newton.

II

Já no início d'*O Analista*, Berkeley revela que adotará a postura de um "livre pensador" para avaliar os "objetos, princípios e métodos de demonstração" da matemática então adotada em sua época[3]. Essa informação possui uma interessante característica. Trata-se de uma estratégia argumentativa. Para compreendê-la, antes é necessário observar que os objetivos que levaram à elaboração d'*O Analista* não são somente de caráter matemático. Há ali também um objetivo teológico. Isso está evidente no próprio título do texto: "*O Analista*: um discurso dirigido a um matemático infiel, em que se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna se concebem de maneira mais distinta ou se deduzem de maneira mais evidente que os mistérios da religião e as propostas da fé" [4]. O que se propõe investigar é se um matemático teria a permissão para tratar a matemática como mais importante que a religião. Isso porque os objetos com as características dos mistérios (presentes na religião, isto é, os objetos da fé) nunca seriam admitidos nas rigorosas demonstrações matemáticas. A estratégia argumentativa, portanto, é assumir transitoriamente a posição de um matemático moderno (que considerasse ao mesmo tempo a religião como duvidosa) para avaliar a então matemática praticada pelos modernos, como, por exemplo, o método das fluxões. Portanto, a posição de um "livre pensador" pode ser caracterizada, primeiramente, n'*O Analista*, como sendo a de um matemático moderno que aceitaria o método das fluxões, devido ao seu tratamento rigoroso, e que, ao mesmo tempo, desconsideraria a religião por seu rigor demonstrativo ser prejudicado pela aceitação dos "mistérios" (objetos impossíveis de serem apreendidos pela razão humana).

Desse modo, se alguém julga a religião como inexata, existiria um ponto de referência para realizar tal avaliação? Para esse livre-pensador isso se encontraria na própria matemática até então aceita. É nesse sentido que Berkeley localiza, de maneira geral, o que seriam os elementos para

3 Cf: Berkeley (1979, §2, p. 65). Berkeley utiliza os termos "livre pensador" em outros de seus textos, como por exemplo *Alciphron* (1732), para se referir a pensadores céticos e ateus (cf. Robles, 2006, p. 19-20).

4 Segundo Robles, existem biógrafos de Berkeley que apontam com sendo o físico e matemático Edmund Halley (o do tão famoso cometa Halley) esse infiel matemático em questão. *O Analista* teria sido escrito em resposta a uma atitude de Halley: ter convencido Samuel Garth (um amigo em comum com Berkeley) a não receber seus últimos serviços espirituais no leito de morte. Pois, para Halley, a religião estaria repleta de mistérios e sofismas a ponto de não valer a pena confiar nela. Robles não assegura a veracidade de tal fato. Porém coloca *O Analista* como parte de um projeto berkeleyano para atacar o ateísmo e ceticismo, tentando assegurar a possibilidade do ensino da religião cristã. *O Analista*, nesse sentido, seria um texto dirigido de maneira mais geral a matemáticos modernos descrentes e difamadores da religião (cf. Robles, 2006, p. 19-20).

apontar o rigor da matemática, em especial a geometria. É importante frisar o que seriam tais elementos dos próprios matemáticos:

> "Tem sido uma observação antiga que a geometria é uma excelente lógica. Deve-se reconhecer quando as definições são claras, quando os postulados não podem ser recusados nem os axiomas negados; e quando a partir da nítida contemplação e comparação de figuras suas propriedades são derivadas pela cadeira contínua e bem conectada de conseqüências, permanecendo os objetos ainda presentes à mente e a atenção sempre voltada a eles. Adquire-se com isso um hábito de raciocínio, minucioso, exato e metódico: hábito esse que fortalece e ilumina a mente e torna-se de uso geral na investigação da verdade, ao se transferir para outros assuntos" (Berkeley, 1979, §2, p. 65).

Há, portanto, três âmbitos que estariam em questão quando se avalia o rigor de uma investigação. Berkeley ressalta o fato da geometria ser uma *lógica*, no sentido, das verdades geométricas resultarem de (a) definições claras dos objetos geométricos; (b) princípios auto-evidentes; e (c) propriedades derivadas por uma série interligada de raciocínios[5]. Desse modo, um método matemático é rejeitado por utilizar objetos ou princípios ininteligíveis, além de ilegítimas inferências demonstrativas. Vejamos, assim a crítica propriamente dita.

A crítica aos objetos do método das fluxões

Berkeley destaca o que Newton denominou como *momento* como sendo os objetos indevidamente admitidos no método das fluxões. Seu julgamento se apóia em dois textos de Newton: o Lema II, Livro II, dos *Principia,* e o *De quadratura curvarum*, texto publicado como apêndice da edição latina da *Ótica*. Isso é um importante detalhe para compreender a pretensão de Berkeley, ou seja, são os texto onde Newton já apresenta sua fase "sintética" da matemática, fase que se acreditava ter alcançado um verdadeiro caráter geométrico e rigoroso do método das fluxões, superando outros método analíticos ao estilo cartesiano. Para construir o conceito de momento, primeiramente Berkeley afirma os elemento cinemáticos aí envolvidos: "velocidades são chamadas fluxões [fluxions]; enquanto que as quantidades [matemáticas] geradas são chamadas quantidades fluentes [flowing quantities]" (Berkeley, 1979, §3, p. 66). Além disso, fluxões e quantidades fluentes surgiriam em partes infinitamente pequenas de tempo. É isso que determinaria o conceito de *momento*: são quantidades fluentes geradas nessa parte infinitamente pequena de tempo[6]. Há ainda dois aspectos importantes da noção de momento que se deve esclarecer. O primeiro é a

---

5 Segundo Jesseph, não há nada de idiossincrático nesses critérios apresentados por Berkeley. Tratar-se-ia do mais elementar padrão de rigor matemático aceito até então. Em especial, esses critérios evocariam princípios lógicos apresentados por Aristóteles nos *Analíticos Posteriores*. (cf: Jesseph, 1993, p. 183-185) e (cf: Jesseph, 2005, p.299).

6 Newton apresenta uma igualdade entre a fluxão e os acréscimos (ou decréscimos) das quantidades fluentes gerados nesse tempo infinitamente pequeno. No Lema II (*Principia*, Livro II), considerando essa igualdade, Newton nomeia ambos de momentos. Berkeley reproduz essa diferente atitude de Newton no parágrafo 3, d'*O Analista*: "Afirma-se que essas fluxões, quase como os incrementos das quantidades fluentes, são geradas nas menores partículas de tempo iguais, e que são exatamente iguais na primeira proporção dos incrementos nascentes ou na última dos incrementos evanescentes. Por vezes, no lugar das velocidades, são considerados os aumentos ou decréscimos momentâneos de quantidades fluentes indeterminadas, sob a denominação de momentos" (Berkeley, 1979, §3, p. 66)

interpretação que coloca os momentos como as quantidades com as quais os movimentos se iniciam ou finalizam. Porém, *não se deve concebê-los como quantidades finitas*, isto é, desconsideram-se as magnitudes dos momentos, pois são quantidades que se localizam entre o nada e uma quantidade finita e, assim, são compreendidos como "princípios que geram quantidades finitas". O outro aspecto refere-se à possibilidade de se determinar momentos de ordens superiores. Isso significa que se pode obter uma nova fluxão instantânea a partir de uma primeira e assim por diante.

Eis a crítica, portanto: segundo Berkeley, esses objetos tornam-se suspeitos, com respeito à inteligibilidade, em virtude da maneira como as faculdades mentais se estruturariam e têm acesso aos seus conteúdos. As faculdades em questão são os sentidos e a imaginação:

> "...assim como nossos *sentidos* ficam exauridos e intrigados com a percepção de objetos extremamente diminutos, também a *imaginação*, faculdade que deriva dos sentidos, fica sumamente exaurida e intrigada para conceber idéias claras das partículas mais diminutas do tempo, ou dos ínfimos incrementos aí gerados; e muito mais ainda para compreender os momentos ou incrementos das quantidades fluentes em *statu nascenti*, em sua origem ou primeiríssimo começo da sua existência, antes de se tornarem partículas finitas" [itálico meu] (Berkeley, 1979, §4, p. 67).

Nessa instância da crítica, há um duplo comprometimento. Um deles é considerar os sentidos como padrão para as demais atividades cognitivas. A imaginação, em particular, seria restrita aos mesmos limites da sensibilidade. Assim, tudo o que não fosse possivelmente perceptível e, por conseguinte, imaginável, tampouco seria inteligível. Por outro lado, entende-se que a imaginação "deriva-se" dos sentidos, supostamente, porque quem fornece o conteúdo para imaginação é a própria faculdade dos sentidos. Sem esse vínculo, a imaginação não atuaria ou, até mesmo, não existiria. Assim, o vínculo não só possibilita a atuação da própria imaginação, como, também a limita a produzir objetos que nunca ultrapassarão as características dos objetos fornecidos pelos sentidos. Imaginar é trabalhar com o que é primeiramente sensível. Berkeley atribui a essas duas faculdades o papel de determinar se algo é compreensível ou não. Portanto, o critério de inteligibilidade utilizado aqui exige que o objeto geométrico seja acessível por alguma dessas duas faculdades.

É nesse aspecto que os *momentos* são interditados como objetos ininteligíveis. Como os *momentos* são compreendidos como quantidades sem magnitudes, geradas em um fluxo temporal infinitamente pequeno, encontram-se além da nossa capacidade de imaginação. Os sentidos não percebem o que está além do que é finito. O conteúdo que é imaginado incide no mesmo campo do conteúdo dos sentidos: o do finito. Além do mais, com tal critério, tudo o que diz o que Newton afirma a respeito da possibilidade de encontrar momentos de outras ordens fica inteiramente rejeitado.

Antes de passarmos ao próximo âmbito da crítica de Berkeley, cabe aqui uma reflexão. Para aquele de estuda os argumentos de Berkeley sobre as questões epistemológicas, principalmente o que é apresentado em sua obra central, *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano*

(1710), encontra nessa crítica aos *momentos* algo muito familiar: maneira como as faculdades mentais estão estruturadas. Nos *Princípios*, a imaginação também depende do que os órgãos dos sentidos lhe fornecem. Porém, sabe-se que nos *Princípios* esse modelo está intimamente ligada à sua filosofia do "ser é ser percebido". Nesse sentido, Berkeley estaria ou não utilizando n'*O Analista* seu próprio critério epistemológico para criticar os objetos do método das fluxões? Uma resposta afirmativa a isso parece gerar duas espécies de "desconfortos". O primeiro diz respeito à estratégia inicial de Berkeley, isto é, a de assumir a posição de um livre-pensador para criticar a matemática. Nesse sentido parece que Berkeley está fugindo de sua proposta: a de avaliar a matemática dentro dos critérios aceitos pelos livre-pensadores. O segundo desconforto refere-se à afirmação do professor Jesseph. Aqui parece que ele estaria se equivocando quanto a leitura da crítica de Berkeley. Contudo, prossigamos sem ainda fornecer uma solução para essa situação.

A crítica aos princípios e às demonstrações do método das fluxões

Apesar de Berkeley apresentar dois exemplos de demonstrações de Newton, será suficiente para se compreender a crítica de Berkeley, analisar somente uma delas. Em especial, aquela onde se demonstra como encontrar o *momento* gerado pelo movimento nascente de duas quantidades fluentes multiplicadas. Para tanto, pode-se agora dizer que os enunciados apresentados acima (quanto aos objetos dos método das fluxões) entram como princípios que determinariam os passos demonstrativos. Dessa maneira, a apresentação dos problemas demonstrativos deve ser considerada uma crítica tanto aos princípios como também à "cadeia" de inferências fornecidas por Newton.

Assim, para um retângulo de lados *A* e *B*, encontra-se como momento $aB + bA$. Nas palavras de Newton:

> "Caso 1: Um retângulo qualquer, como *AB*, aumentando por um contínuo movimento, quando ainda faltava dos lados *A* e *B* a metade de seus momentos $\left(\frac{1}{2}\right)a$ e $\left(\frac{1}{2}\right)b$, era $A - \left(\frac{1}{2}\right)a$ multiplicado por $B - \left(\frac{1}{2}\right)b$, ou $AB - \left(\frac{1}{2}\right)aB - \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{4}\right)ab$; todavia, assim que aos lados *A* e *B* são acrescidos as outras metades dos momentos, o retângulo transforma-se em $A + \left(\frac{1}{2}\right)a$ multiplicado por $B + \left(\frac{1}{2}\right)b$, ou $AB + \left(\frac{1}{2}\right)aB + \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{4}\right)ab$. Subtraia-se desse retângulo o retângulo anterior e restará o excesso $aB + bA$. Portanto, com a totalidade dos incrementos *a* e *b* dos lados gera-se o incremento $aB + bA$ do retângulo. Q.E.D." (Newton, PN, 1999, p. 648).

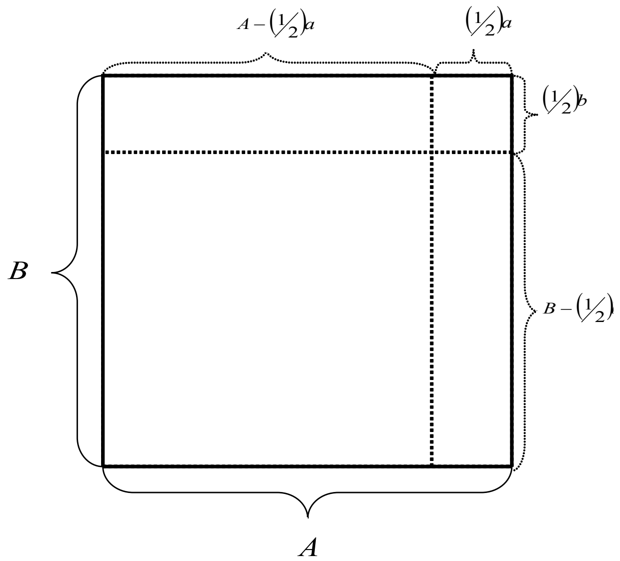

Figura 1.1

Mesmo que Newton não tenha apresentado as figuras propriamente ditas, será interessante construí-las aqui como um auxílio explicativo do que está exposto nessa demonstração. Primeiro, Newton considera que a multiplicação de duas linhas, *A* e *B*, geram o retângulo *AB* (ver figura 1.1). O que é importante frisar o objetivo dessa demonstração: encontrar o momento de um movimento *nascente* (isto é, *momento* pelo qual o retângulo *AB* irá aumentar). A partir disso, pode-se distinguir dois passos: (I) é possível determinar a quantidade desse retângulo quando ainda faltava meio *momento* para se chegar em *AB*. Assim, o retângulo (antes de ser *AB*) poderia ser expresso pela multiplicação dos lados:

$$A-\left(1/2\right)a \text{ e } B-\left(1/2\right)b \qquad [1.1].$$

Efetuando a multiplicação, obtém-se como resultado:

$$AB-\left(1/2\right)aB-\left(1/2\right)bA+\left(1/4\right)ab \qquad [1.2].$$

O outro passo (II), pode ser identificado como sendo o fato de Newton encontrar a quantidade do retângulo *AB após* transcorrer meio *momento* desse mesmo retângulo. Ou seja, que a multiplicação dos lados fosse (ver figura 1.2):

$$A+\left(1/2\right)a \text{ e } B+\left(1/2\right)b \qquad [1.3];$$

gerando como resultado:

$$AB+\left(1/2\right)aB+\left(1/2\right)bA+\left(1/4\right)ab \qquad [1.4].$$

Portanto, o *momento* inteiro do retângulo será a soma do valor final do retângulo (apresentado no segundo passo) menos o inicial (obtido no primeiro passo):

$$\left[AB + \left(\tfrac{1}{2}\right)aB + \left(\tfrac{1}{2}\right)bA + \left(\tfrac{1}{4}\right)ab\right] - \left[AB - \left(\tfrac{1}{2}\right)aB - \left(\tfrac{1}{2}\right)bA + \left(\tfrac{1}{4}\right)ab\right] \quad \therefore$$

$$\left\{(AB - AB) + \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)aB + \left(\tfrac{1}{2}\right)aB\right] + \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)bA + \left(\tfrac{1}{2}\right)bA\right] + \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)ab - \left(\tfrac{1}{4}\right)ab\right]\right\}$$

e que resultará em: $aB + bA$.

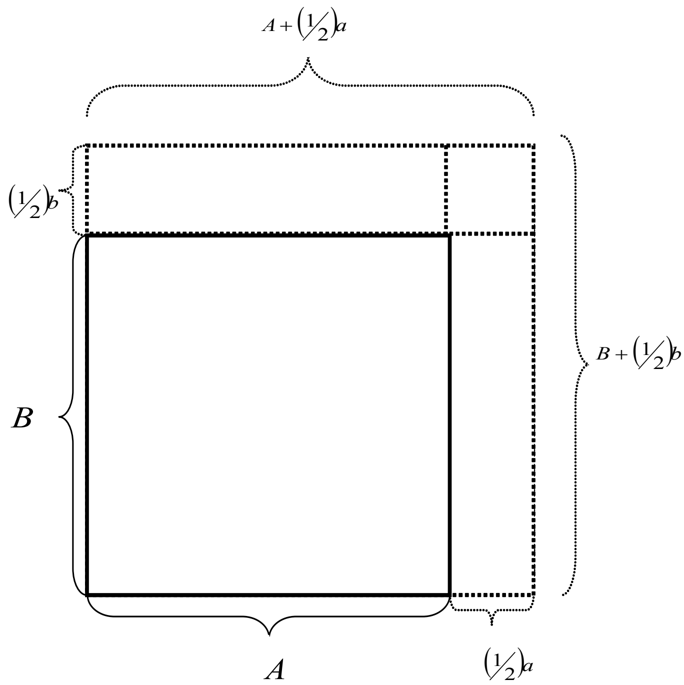

Figura 1.2

São dois os problemas que Berkeley encontra na obtenção desse resultado. O primeiro surge do confronto entre duas hipóteses:

> (H.1) O movimento é nascente, ou seja, o retângulo *AB* está aumentando por um contínuo movimento;
>
> (H.2) Considerar o retângulo como incompleto, isto é, como faltando $\left(\tfrac{1}{2}\right)a$ e $\left(\tfrac{1}{2}\right)b$.

Essa duas hipóteses são mutuamente excludentes, porque, ao se afirmar (H.1), Newton se compromete com o movimento nascendo a partir de um limite determinado. O *momento* determinará o primeiro movimento a partir desse limite estabelecido. Nesse caso, o limites seriam os lados do retângulo, a saber: a linha *A* e a linha *B*. No entanto, Newton assume como um passo demonstrativo o que está expresso em (H.2). Isso faz com que o movimento evanesça em direção aos limites. Em (H.1) o movimento sai dos limites, enquanto que em (H.2) o movimento vai em direção a eles. Ora, se o movimento é nascente, como descreve (H.1), o que autoriza já em seguida assumir a hipótese (H.2) que trata o movimento como evanescente? Para Berkeley não há nada que permita essa mudança, ou seja, a hipótese (H.1) não implica diretamente (H.2). É por isso que mais adiante ele conclui: "...não é fácil conceber por que devemos tomar quantidades inferiores a *A* e *B* para obter o incremento de *AB*, procedimento do qual devemos admitir que a causa ou motivo último é obvio..." (Berkeley, 1979, §11, p. 71). Aqui, a "causa" ou "motivo" último nada mais é do que o resultado $aB+bA$. Newton, na visão de Berkeley, acreditava na veracidade desse resultado, mas tivera dificuldade para mostrar como alcançá-lo. Para Berkeley, é evidente que Newton, e os seus seguidores, teriam se contentado muito facilmente com as demonstrações do método das fluxões. A crença na veracidade do resultado teria os impedido de diferenciar entre a *certeza* e a *utilidade* de um procedimento demonstrativo, permitindo que erros fossem introduzidos em tais demonstrações sem serem percebidas.

Passemos a mais uma problemática encontrada por Berkeley. Ela também diz respeito a outras duas hipóteses assumidas.

> (H.3) Os *momentos* não são quantidades finitas, mas "princípios geradores" dessas quantidades;
>
> (H.4) Os *momentos* podem ser divididos, ou seja, considerado em suas metades;

Novamente, essa duas afirmações são contraditórias entre si. Como visto acima, (H.3) descreve uma das características dos objetos denominados como *momentos*. Na demonstração de Newton, ela entra como uma "premissa" ou espécie de princípio que regularia a cadeia de raciocínio da demonstração. Isso porque é a finalidade central da demonstração determinar esse tal objeto denominado *momento.* Contudo, na sua prática demonstrativa, Newton parece não levar em consideração o que está descrito em (H.3). Visto que os *momentos* não são quantidades finitas, eles não podem assumir características dessas quantidades. Porém, ao praticar (H.4), ou seja, dividir os momentos pela metade, Newton está atribuindo uma propriedade das quantidades finitas aos momentos: possuir magnitude que pode ser distinguida em partes. Essa propriedade está justamente sendo negada em (H.3). Berkeley deixa evidente esse problema da seguinte maneira: "Afirma-se que a magnitude dos momentos não é levada em conta, mas supõe-se que esses mesmos momentos se dividam em partes." (Berkeley, 1979, §11, p. 71).

Cabem agora outras reflexões sobre essa crítica de Berkeley à demonstração newtoniana. Em qual sentido, inicialmente, se pode dizer que existe um descontentamento por parte de Berkeley em relação ao que Newton demonstra ser o momento do retângulo *AB*? Na verdade, essa pergunta exige um maior esclarecimento (além do que foi feito) da acusação de *non sequitur* de Berkeley ao raciocínio de Newton. Com o objetivo de levantar vários problemas para os analistas modernos refletirem, problemas esses apresentados no corpo d'*O Analista*, Berkeley elabora uma grande lista de perguntas no final do próprio texto. Em uma dela, a Questão 28, existe algo que pode ser utilizado para precisar tal acusação à Newton: "Não seria a mudança de hipóteses ou (como poderíamos chamar) a *fallacia suppositionis* um sofisma que contagia larga e amplamente os raciocínios modernos, ambos na filosofia mecânica como na abstrusa e refinada geometria?" (Berkeley, 1979, Questão 28, p. 98). Está evidente que Berkeley acusa os modernos de se apoiarem em falácias, tanto na geometria como também na física (ou melhor, mecânica). O importante é que aqui ele denomina a falácia em jogo: *fallacia suppositionis.* O significado disso é que alguns dos raciocínios utilizados pelos modernos supõem hipóteses que são alteradas sem uma justificativa adequada. Contudo, agora poderíamos afirmar que o critério demonstrativo aqui não seria algo restrito à filosofia berkeleyana? Agora a resposta parece ser realmente positiva. Pois, pode-se afirmar que a acusação da decorrência *fallacia suppositionis* nasce de um lema que Berkeley apresenta na crítica ao segundo exemplo demonstrativo (o do *De quadratura*, que não será necessário explicitar aqui). Tal lema é o seguinte:

> "Se em vista para demonstrar alguma proposição, um certo ponto é considerado e que, em virtude deste, outros pontos são alcançados. Tal ponto considerado sendo posteriormente destruído ou rejeitado por uma suposição contrária, nesse caso, todos os outros pontos são atingido com isso e conseqüentemente a isso, devem ser destruídos ou rejeitados também. Desse modo, portanto, no que segue não serão mais supostos ou aplicados na demonstração" (Berkeley, 1979, §12, p. 71-72).

Berkeley está afirmado com esse lema a seguinte relação entre premissas e conclusão: se a partir de uma premissa P se conclui C e, assumindo-se logo em seguida $\neg P$ (isto é, a negação da premissa P), então não será possível reter a conclusão C. Esse lema não elimina a possibilidade de que, em uma demonstração, alguma hipótese inicial seja alterada. Porém, ao se alterar uma hipótese inicial, tudo o que surgiu dessa hipótese deve também ser afetado. Newton estaria agindo contra o lema. Por sua vez, é possível agora reconhecer que Berkeley estaria utilizando um elemento lógico que seria aceito facilmente entre os defensores do método das fluxões. O que assegura essa tese é o fato de Berkeley logo em seguida a apresentação desse lema afirma que ele seria "tão claro que não necessita de prova". Com isso, seria confirmado a coerência com o objetivo inicial, a de se "revestir" como um livre-pensador, além da interpretação de Jesseph.

Portanto, como se deve interpretar o comprometimento ou não com os elemento do *esse est percipi* nessa crítica ao rigor matemático n'*O Analista*? A resposta a isso exige que se reformule o significado de "livre-pensador" que norteia o processo argumentativo desse texto de Berkeley. Isso significa que tal personagem não seria aquele sujeito que avalia uma "ciência" dentro de seus próprios limites estabelecido, mas muito além que isso, seria um alguém que aplica critérios não pertencentes a uma "ciência" para avaliá-la. No primeiro momento, Berkeley realmente se utiliza de elementos de sua própria filosofia (que seria externos à matemática, segundo os livre-pensadores) para avaliar os *momentos* newtoniano. Nesse sentido, Berkeley age como um livre-pensador. No segundo momento, Berkeley ainda continua agindo como um livre-pensador ao avaliar as demonstrações newtonianas a partir de um critério interno que seria aceito nessa matemática. O que é surpreendente é o fato, segundo Berkeley, de Newton ser incapacidade de cumprir uma sua própria exigência: o fato do método das fluxões estar de acordo com os princípios demonstrativos assumidos pelos geômetras antigos. Isso ajuda a esclarece que a interpretação do professor Jesseph deve ser aplicada somente a segunda parte da crítica ao método das fluxões (a parte demonstrativa). Ali pode-se realmente afirmar que não há a necessidade de ligar a acusação da presença de falácia demonstrativa ao que surge do princípio *esse est percipi*.

Existe ainda um último ponto a ser questionado: existe dessa maneira uma apresentação de uma noção de *rigor* matemático assumido por Berkeley, n'*O Analista*, e que fundamentaria sua concepção propriamente dita da matemática? Podemos aqui afirmar que sim. Contudo, isso se mostrará evidente somente quando se considera a "contraparte positiva" da tese da "compensação de erros". Vejamos rapidamente do que se trata.

III

A problema da "compensação de erros" nasce de uma possível réplica ao que o livre-pensador poderia apresentar. A noção de *momento*, agora inclusive as *diferenças infinitesimais* ao estilo de Leibniz, sugeridas por L'Hopital, não seriam ininteligíveis e muito menos envolvidas em falácias, pois existiriam vários exemplos do sucesso de sua aplicação. Para Berkeley, a *akribeia* [rigor] da geometria garantiria, pelo sucesso do resultados, a veracidade dos "princípios iniciais". Desse modo, é uma tarefa para Berkeley mostrar como mesmo partindo de premissas falsas se chegaria a conclusões verdadeiras. Isso mostraria que ainda com resultados verdadeiros os geômetras não teriam alcançado "ciência" na matemática.

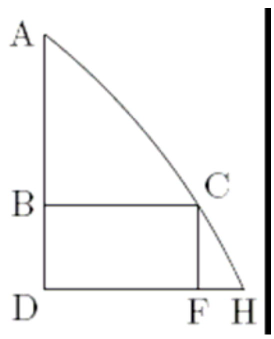

Figura 2.1

Apesar de Berkeley fornecer quatro exemplos de compensação será suficiente aqui apresentar somente um deles, ou seja, o terceiro na ordem manifestada por ele n'*O Analista*. Trata-se do exemplo ao estilo do método das fluxões[7]. O problema a ser resolvido é o de encontrar uma ordenada a partir de uma equação de área. Berkeley supõe que x^2 represente a área *ABC*[8] (ver figura 2.1). Tomando-se *AB=x, BC=y* e *BD=*o, Berkeley procura mostrar como $y = 2x$. Para que isso ocorra, supõe-se que *AC* é uma magnitude fluente. A área abaixo dessa linha curva flui com o movimento da linha *BC* na abscissa *AD*. Após o primeiro aumentos dessa área, *x* torna-se $x + o$. Do mesmo modo x^2 torna-se $(x+o)^2$. Ao se desenvolver esse binômio, a expressão que surge é:

(c.1) $$x^2 + 2xo + o^2.$$

Até aqui o que Berkeley apresenta é somente a manipulação de equações. Pode-se dizer que, como no exemplo anterior, aqui se trata do caminho algébrico desse segundo exemplo de Berkeley. O aspecto geométrico surge quando se relaciona a equação (c.1) com as próprias magnitudes geométricas. Isso permite escrever:

(c.2) $$x^2 + 2xo + o^2 = ABC + CBDH.$$

Quando se elimina de (c.2) a equação inicial x^2 e o seu respectivo referencial geométrico *ABC*, o que restará, portanto, será somente o incremento da área:

(c.3) $$2xo + o^2 = CBDH.$$

Agora, considerando o lado geométrico, é possível igualar o incremento a uma soma. Desse modo $CBDH = BCFD + CFH$. Com isso obtém-se:

(c.4) $$2xo + o^2 = BCFD + CFH.$$

É a partir desse momento que Berkeley fornece um sutil procedimento. Ele sugere uma

---

7 (cf. Berkeley, 1979, §§26-27, p. 81-83).

8 Essa equação é utilizada por Newton em vários de seus textos para representar uma área curvilínea. Um exemplo disso encontra se na aplicação da Regra I das quadraturas, no *De analyse*. (cf. MP-2, p. 206-209).Portanto, Berkeley está retomando aqui uma equação que não é estranha ao trabalho newtoniano.

representação simbólica para o lado geométrico.

No caso da figura retangular $BCFD$, Berkeley sugere como símbolo yo. Isso nada mais é do que a multiplicação da base do retângulo pela sua altura, o que está de acordo com geometria dos antigos. Pois, para eles, duas linhas multiplicadas fornecem uma área. Nesse caso, a área é a multiplicação da linha *BD* (representado por o) pela outra linha *DF* (representada por *y*). O restante do incremento, que é a figura curvilínea CFH, recebe uma interessante interpretação. Berkeley observa que, na figura curvilínea *ABC*, a sua equação é apresentada como sendo o quadrado da abscissa *AB*, ou seja, x^2. Assim, como CFH é uma figura curvilínea semelhante a *ABC*, Berkeley assume com sendo o quadrado da base de CFH a expressão para a sua área, gerando qo^2. Aqui *q* representa um número qualquer, pois ainda Berkeley estaria pensando em um caso geral dessa expressão. A partir desses raciocínios pode-se fornecer a equação:

(c.5) $$2xo + o^2 = yo + qo^2.$$

Berkeley ainda reescreve essa equação retirando o elemento comum aos termos. Nesse caso é o próprio o. Isso fornece:

(c.6) $$2x + o = y + qo.$$

Com essa equação Berkeley agora argumenta como é que acontece a compensação de erros. Primeiro, poder-se-ia considerar que as quantidades podem esvanescer ao estilo do texto do *De quadratura*. No esquema newtoniano, tudo o que possuiria um elemento temporal, dessa maneira, desapareceria. Na equação (c.6), as quantidades que possuem o elemento temporal seriam as quantidades com o, o que resultaria em: $y = 2x$. Contudo, Berkeley relembra que se uma hipótese inicial é alterada ou rejeitada, tudo o que foi alcançado com ela deve também dever ser alterada ou rejeitada: "...não é legítimo ou lógico supor que o se esvanesce, digo, que é nada, isto é, que não existe incremento, a menos que, ao mesmo tempo, rejeitemos com o incremento mesmo toda conseqüência sua, isto é, qualquer coisa que não pudesse se obter senão supondo tal incremento" (Berkeley, 1979, §19, p. 76). O que Berkeley está relembrando aqui é a própria crítica ao método das fluxões, onde se acusa Newton de agir falaciosamente (como foi apresentado acima).

No entanto, Berkeley apresenta o que permitiria fornecer os resultados corretos no método das fluxões. Isso seria a própria compensação de erros. Explicando, como *q*, ao se considerar o caso específico da figura *ABC*, assume o valor de 1 (isso porque $1x^2$ é proporcional a qo^2), então $o = qo$. Isso significa que esses valores estão em lados opostos da equação, ou seja, estão com sinais invertidos, o que permite escrever $o - qo = 0$. Aqui existirá a compensação de erro, ao se assumir que as quantidades contendo o esvanescem. Porém, são erros que se localizam em lado opostos da equação isso faz com que eles não gerem erros na conclusão: "portanto, se perguntará: como sucede que por eliminar o não aparece nenhum erro na conclusão? Respondo que a verdadeira razão disso é claramente que ao ser q unidade, qo é igual a o, e portanto, $2x+o-qo=y=2x$, as quantidades iguais qo e o sendo eliminadas devido ao seus sinais contrários." (Berkeley, 1979, §26, p. 76). Portanto, com isso Berkeley mostra como o método das fluxões procederia falaciosamente, ao interpretar a quantidade o como algo diferente de uma quantidade finita, mesmo fornecendo resultados que possam ser considerados verdadeiros. Nesse sentido, com esse exemplo, é possível observar em que sentido Berkeley não admite demonstrações invertidas: aquelas que assegurariam a veracidade dos princípios tendo como base o sucesso das conclusões.

O lado positivo da "compensação de erros" surge quanto Berkeley observa a possibilidade de interpretar os símbolos da quantidades nascentes e diferenças como sendo finitas (nesse caso a quantidades representadas por o, para Newton, e dx e dy no caso de Leibniz). Ao fazer isso observa-se que sempre se chega ao mesmos resultado. Como isso surgiria uma pista de como o método das fluxões, além de qualquer outro tipo de cálculo, poderia se enquadrar em um projeto de fundamentação via a "compensação de erros". Nas palavras de Berkeley:

> "Essa sugestão pode ser talvez mais estendida e aplicada a bons propósitos por aqueles que possuem tempo disponível [leisure] e curiosidade por tais assuntos. O uso que eu faço disso é mostrar que não pode obter análise com aumentos ou diferenças, mas a obtemos com quantidades finitas, sejam elas tão grandes quanto forem..." (Berkeley, 1979, §29, p. 84).

Portanto, é evidente que Berkeley assume a possibilidade de existir uma matemática rigorosa. Isso deve ser visto como uma solução aos problemas apontados. Solução essa que Berkeley realmente está disposto a aceitar. Por quê estaria? Justamente porque a compensação de erros permite utilizar objetos finitos, que estão de acordo com o ser é ser percebido, e ao mesmo tempo evitando os problemas demonstrativos que nascem da não aplicação de critérios lógicos. Critérios lógicos que Berkeley está disposto a aceitar. Portanto, eis aqui a manifestação de elementos que estruturam o que Berkeley aceita com "rigor" a ser seguido na matemática.

Bibliografia

APOLONIO de Perga. (1952) *Conics*. (trad. R. Castesby Taliaferro). In: *Great Books of the Western World*. V-11. p 593-804. Chicago, Encyclopaedia Britannica.

ARTHUR, R. T. W. (1995) *Newton's fluxions and equably flowing time*. *Studies in History and Philosophy of Science*, v. 26, n. 2, p. 340-356.

BARROW, I. (1916). *Geometrical lectures of Isaac Barrow*. [Trad. Child, J. M.]. Chicago, London: The Open Cout Publishing Company.

BERKELEY, G. (1998 [1710]) *A treatise concerning the principles of human knowledge*. [Ed. by Dance, J.] Oxford, New York. Oxford University Press.

BERKELEY, G.(1979 [1734]) *The Analyst*. In: *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne.* [Ed. e Com. por Luce, A. A. e Jessop, T. E.]. V. 4, p. 53-102. Nelson (Kraus Reprint), Nelden.

COHEN, I. B. & WESTFALL, R. S. (2002) *Newton: Textos, Antecedentes e Comentários*. [Trad. Vera Ribeiro]. Rio de Janeiro: Contraponto.

DE GANDT, F. (1986) *Le style mathématique des* Principia *de Newton. Revue d'Histoire des Sciences*, v. 39, p. 195-222.

DE GANDT, F. (1999) *Matemáticas y realidad física en el siglo XVII: de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton*. In: GUENARD, F. et LELIÈVRE, G. (orgs) *Pensar la matemática*. [trad. Carlos Bidón-Chanal], Barcelona, Tusquets Editores, 3ª ed.

DESCARTES, R. (1954 [1637]) *The Geometry of René Descartes.* [Trad. Smith, D. e Lathan, M.). New York: Dover Pubications.

GIORELLO, G. (1992) *The 'fine struture' of mathematical revolutions: metaphysics, legitimacy e rigour. The case of calculus from Newton to Berkeley and Maclaurin.* In: GILLIES, D. (ed.) (1992) *Revolutions in mathematics*. Oxford: Carendon Press.

GUICCIARDINI, N. (1999) *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathemetical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press.

GUICCIARDINI, N. (2004) *Newton and the publication of his mathematical manuscripts*. Studies in History and Philosophy of Science, V. 35, n. 3, p. 1-18.

HALL, A. R. e HALL, M-B. (1962) *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. Cambridge : Cambridge University Press.

HEATH, T. (ed.) (1956) *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover, 3 vols.

JESSEPH, D. M. (1993) *Berkeley's Philosophy of Mathematics* Chicago/London: The University of Chicago Press.

JESSEPH, D. M. (1998) *Leibniz on the foundations of the calculus: the question of the reality of infinitesimal magnitudes*. Perspectives on Science. V.6, p.6-40.

JESSEPH, D. M. (2005). *Berkeley's Philosophy of Mathematics. In: The Cambridge Companion to Berkeley.* (ed. Winkler, K.). Cambridge University Press. New York.

LEIBNIZ, G. W (1995 [1669]) *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. In: PARMENTIER, M. (ind., trad., e notas) (1995) *La naissance du calcul différentiel – 26 articles des Acta Eruditorum.* 2ª ed. Paris: Vrin.

L'HÔPITAL, G. F. A. (1768 [1696]). *Analyse des infiniment petits por l'intelligence des lignes courbes.* Paris: Imprimiere Royale.

NEWTON, I. (1934 [1687]) *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translations revised, and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. Berkeley : University of California Press. 2 vols.

NEWTON, I. (1959-1977) *The Correspondence of Isaac Newton*. (ed. H. W. Turnbull *et alii*) Cambridge : Cambridge University Press. 7 vols.

NEWTON, I. (1999 [1687]). *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Trad. I. B. Cohen e A. Whitman. Berkeley: University of California Press.

PANZA, M. (2003) *Newton*. Paris: Belles Lettres.

PANZA, M. (2005) *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. Paris: Albert Blanchard.

POPPER, K. *Conjecturas e Refutações*. Brasília: UnB, 1994.

POPPER, K. *Três Concepções Acerca do Conhecimento Humano*. (Col. Os Pensadores), p. 125-151.

ROBLES, J. A. (2006). *Los escritos matemáticos de George Berkeley y la polémica sobre El Analista*. Universidad Nacional Autónoma de México. México.

WHITESIDE, D. T. (1964) (ed.) *The Mathematical Works of Isaac Newton*. New York, London: Johnson Reprint Corporation, 2 vols.

WHITESIDE, D. T. (1967-1980) (ed.) *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. 8 vols. Cambridge: Cambridge University Press.